ORSAY
Série A,
N° D'ordre 101

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Jean-Loup GERVAIS

1re THÈSE : UN MODÈLE DYNAMIQUE AUTOCONSISTANT DES MÉSONS P et K^* TENANT COMPTE DE FORCES PRODUITES PAR L'ÉCHANGE DE DEUX PARTICULES.

2e THÈSE : PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le 14 Mai 1965 devant la Commission d'examen

MM. M. LEVY Président

M. GOURDIN
Ph. MEYER
L. MICHEL
} Examinateurs

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534910_0023

ORSAY
Série A,
N° D'ordre 101

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Jean-Loup GERVAIS

1re THÈSE : UN MODÈLE DYNAMIQUE AUTOCONSISTANT DES MÉSONS P et K* TENANT COMPTE DE FORCES PRODUITES PAR L'ÉCHANGE DE DEUX PARTICULES.

2e THÈSE : PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le 14 Mai 1965 devant la Commission d'examen

MM. M. LEVY Président

M. GOURDIN
Ph. MEYER
L. MICHEL
} Examinateurs

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK - LEIDEN

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE PARIS

- PROFESSEURS -

Doyen M. ZAMANSKY

BRELOT	T analyse supérieure
PRENANT	T anatomie et histologie comparée
GRASSE	T evolution des êtres organisés
PREVOST	T chimie organique
WYART	T minéralogie et cristallog.
TEISSIER	T zoologie
MANGENOT	T biologie végétale (Orsay)
AUGER	T physique quantique et relativité
MONNIER	T physiologie générale
PIVETEAU	T paléontologie
ROCARD	T physique (ENS)
CARTAN	T mathématiques (ENS)
LAFFITTE	T chimie générale
X...	T géométrie supérieure
COULOMB	T physique du globe
Mlle COUSIN	T biologie animale SPCN
CHRETIEN	T chimie minérale
BOCQUET	T zoologie
KASTLER	T physique(ENS)
EPHRUSSI	T genétique
RIVIERE	T geologie SPCN et sédimento. (Orsay)
GAUTHERET	T biologie végétale PCB
LUCAS R.	T recherches physiques
THOMAS A.	T biologie cellulaire
ARNULF	T optique appliquée
MORAND	T physique enseignement
SOLEILLET	T physique PCB
FORTIER	T mécanique expérimentale des fluides
DRACH	T zoologie
QUENEY	T météorologie et dynamique atmosph.
GALLIEN	T embryologie
EICHHORN	T botanique
DE CUGNAC	T biologie végétale SPCN
Mlle CAUCHOIS	T chimie physique
THELLIER	T physique du globe
L'HERITIER	T biologie générale (Orsay)
GRIVET	T radioélectricité (Orsay)
PONCIN	T mécanique générale
DUBREIL	T arithm. et théorie des nombres
CHAMPETIER	T chimie macromoléculaire
CUVILLIER	T micropaléontologie
JUNG	T géologie
TRILLAT	T microscopie et diffraction électronique
WIEMANN	T chimie organique et structurale
JACQUINOT	T spectroscopie et physique céleste (Orsay)
VASSY	T physique de l'atmosphère
DESTOUCHES	T théories physiques
AMIEL	T chimie générale
HOCART	T minéralogie et cristallographie
MATHIEU J.P.	T physique optique
COUTEAUX	T cytologie
MAY	T zoologie
CHOQUET	T théorie des fonctions et topologie
FELDMANN	T biologie végétale marine
GUINIER	T physique des solides (Orsay)
JOST	T physiologie comparée
FORTET	T calcul des probabilités et phy. math.
SCHWARTZ	T calcul dif. et intégral
CHOUARD	T physiologie végétale
MALAVARD	T aviation (techn. aéron.)
NORMANT	T synthèse organique
BENARD	T chimie minérale
BUVAT	T botanique (ENS)
DUGUE	T statistiques mathématiques
SOULAIRAC	T psychophysiologie
ULRICH	T physiologie végétale appl.
MARECHAL	T optique théor. et appl.
KIRRMANN	T théories chimiques
CHADEFAUD	T botanique
Mlle LE BRETON	T physiologie de la nutrit.
LELONG	T application de l'analyse à la géom.
DEVILLERS	T anatomie et histologie comparée
EHRESMANN	T topologie algébrique
FRANCON	T physique SPCN
GLANGEAUD	T géographie phys. et géologie dynam.
DODEMENT	T mathématiques MGP
PISOT	T techniques mathématiques de la phys.
QUELET	T chimie organique
CAGNIARD	T géophysique appliquée
LENNUIER	T physique MGP
RIZET	T génétique (Orsay)
ROUTHIER	T géologie appliquée
Mme TONNELAT	T physique théorique
DIXMIER	T mathématiques MPC
SOUCHAY	T chimie générale
AIGRAIN	T électrotechnique générale
BRUSSET	T chimie systématique
LEVY M.	T physique théorique et htes énergies (Orsay)
Mme CHAIX	T chimie biologique
Mme HUREL PY	T biologie végétale PCB
PANNETIER	T chimie générale
BRUN	T mécanique des fluides I
LEDERER	T chimie biologique (Orsay)
Mme DUBREIL	T mathématiques (agrégat)
Mme LELONG	T mathématiques II (ENS)
BELLAIR	T géologie SPCN
COTTE	T physique électricité
DUBOIS J.E.	T chimie organique
LAMOTTE	T zoologie (ENS)
MICHEL A.	T chimie minérale (Orsay)
OLMER	T énergétique générale
ROUAULT	T électricité (Orsay)
GAUTHIER	T mécanique appliquée
BARCHEWITZ	T chimie physique
BROSSEL	T physique atomique
BUSER	T physiologie comparée
CAMUS	T physiologie végétale
CASTAING	T physique II thermodynamique (Orsay)

CURIEN	T minéralogie et cristallographie
MOYSE	T physiologie végétale (Orsay)
Mme CHARNIAUX-COTTON	T évolution des êtres organisés
POSSOMPES	T zoologie
PULLMANN	T chimie quantique
TEILLAC	T physique nucléaire et radioact. (Orsay)
TONNELAT	T biologie-physico-chimique (Orsay)
VILLE	T économétrie
WILLEMART	T chimie PCB
DODE	T chimie (Orsay)
FREYMANN	T recherches physiques
GUINOCHET	T biologie végétale SPCN (Orsay)
ROCH	T géologie
SCHATZMANN	T astrophysique
TERMIER	T géologie générale
ZAMANSKY	T mathématiques générales
LUCAS	T géologie
ALLARD	T chimie physique
BERTHELOT	T physique des particules fondamentales (Ors.
BRICARD	T météorol. et physique de l'atmosphère (Ors.
Mme ALBE FESSARD	T psycho-physiologie
FRIEDEL	T physique des solides (Orsay)
JULIA M.	T études des molécul. naturelles complexes
LENDER	T biologie animale SPCN (Orsay)
MAGAT	T physico-chimie des radio-éléments
Mlle QUINTIN	T électrochimie
MONOD	T chimie du métabolisme
BENOIT	T physiologie animale (Orsay)
DE POSSEL	T analyse numérique
CHARLOT	T chimie analytique
LEMEE	T écologie végétale (Orsay)
GUERIN	T chimie MPC (Orsay)
CHATELET	T chimie PCB
JEAN	T physique nucléaire (Orsay)
MATTLER	T physique SPCN
BERGERARD	T zoologie (Orsay)
BERTEIN	T électronique (Orsay)
BOUISSIERES	T radiochimie
Mme COUTURE	T thermodyn. et méca. phys.
ELLEMBERGER	T géologie des grandes régions du globe (Ors.
FRANC	T biologie animale PCB
SCHNELL	botanique tropicale
STILKOWSKI	T physiologie végétale
ACHER	T chimie biologique
BAUDOIN	T biologie animale PCB
BEAUMONT	biologie animale SPCN
BLAMONT	géophysique ionosphère
BOUREAU	T botanique
CURIE D.	physique MGP
DURAND-DELGA	T géologie
ERRON	T chimie organique (Orsay)
HELLER	T physiologie végétale
TORTRAT	T calcul des probabilités
CAILLEUX	T géologie SPCN
MAGNAN	physique électricité
DAUDEL	T mécanique ondulatoire appliquée à la chimie théor. et à la phys. nucléaire
ROLLET	T chimie minérale
Mlle JOSIEN	T chimie SPCN
CHEVALLEY	T géométrie algébrique et théorie des groupes
ARNOULT	T électronique (Orsay)
CHAPELLE	T physique I (Orsay)
DELANGE	T mathématiques I (Orsay)
DENY	T mathématiques générales (Orsay)
GERMAIN	T mécanique théorique des fluides
LACOMBE	T métallurgie des métaux nucléaires (Orsay)
BROCHARD	T physique MGP (Orsay)
CABANNES	T mécanique générale
LESIEUR	T mathématiques I (Orsay)
MAZET	T mécanique générale (Orsay)
CAIRE	géographie phys. et géol. dynamique
COMOLET	mécanique des fluides
COMBOEUF	T physiologie animale (Orsay)
DELLOUE	T physique de l'exosphère
GORENFLOT	botanique II (Orsay)
HOUILLON	biologie animale PCB
JULLIEN J.	chimie SPCN (Orsay)
MALGRANGE	T techniques math. de la phys. (Orsay)
OLIVIER	anthropologie
NOZERAN	T botanique II (Orsay)
BLANC LAPIERRE	T physique ENS (Orsay)
CHEVAUGEON	T botanique (Orsay)
KAHANE	T mathématiques (Orsay)
SAMUEL	T mathématiques ENS féminine
KOURGANOFF	T astronomie (Orsay)
THIRY	T mécanique céleste
ABELES	physique SPCN
AMAT	T physique PCB
AUBOIN	T géologie
Mme BENOIST-GUEUTAL	T physique nucléaire et radioactivité (Orsay)
BOUGIS	biologie marine Villefranche s/Mer
BRUHAT	T mathématiques MPC
BRUNN	T géologie historique (Orsay)
CHABBAL	T physique MGP (Orsay)
DEHEUVELS	T mathématiques propédeutique
D'ESPAGNAT	T physique théorique (Orsay)
FURON	T géologie SPCN
Mme GANS	T génétique
GENEVES	biologie végétale PCB
GUILBERT	physique CSU Orléans
HUPE	T pétrographie
HOLLANDE	T biologie générale
LIONS	T analyse numérique
MAITTE	T chimie PCB
MEYER	physique propédeutique
NICOLAS	géologie appliquée

PANIGEL	biologie générale
Mlle FOURCROY	biologie végétale SPCN
Mme CHOQUET-BRUHAT	T mécanique analytique et mécanique céleste

Mlle VEIL	T physiologie générale
LWOFF	T microbiologie
SIESTRUNCK	T mécanique physique et expérimentale
NERON	T mathématiques MPC (Orsay)
Mme PECKER-WIMEL	T astrophysique
BALKANSKY	physique MPC
LE CORRE	T électricité
DELCROIX	T physique des milieux ionisés
GOURDIN	physique théorique et htes énergies (Ors.)
LEHMANN	T physique expérimentale des htes énergies
NATAF	T physique nucléaire et radioactivité (Orsay)
ECHALIER	biologie animale PCB
BARRAUD	physiologie cellulaire
LIORET	T physiologie végétale (Orsay)
DARS	géologie structurale et géologie appliquée
CAMEFORT	T botanique (agrégation)
VICHNIEWSKY	T mécanique industrielle
BLAQUIERE	électronique (Orsay)
ARNOUS	T physique théorique
TATIBOUET	chimie CSU Orléans
MALLIAVIN	T mathématiques propédeutique (Orsay)
GAUDEMAR	chimie propédeutique
PEREZ Y JORBA	physique expérimentale des htes énergies (Ors.)
DAVID	T chimie (agrégation Orsay)
BROUSSE	T mécanique théorique
ROSCH	T astronomie
GUY	T physique expérimentale
LAZARD	mathématiques MPC
MOREL P.	physique MPC
ARSAC	programmation
LEFEBVRE	chimie MPC
CHAPEVILLE	biochimie
BENOIT	physique CPEM
RIO	chimie CPEM
JAUZEIN	géologie (ENS)
PREVOST G.	biologie végétale CPEM
FAVARD P.	biologie animale CPEM
VILKAS	chimie CPEM
Mlle FICINI	chimie CPEM
LEQUEUX	astronomie
COHEN TANNOUDJI	physique MPC
TAVERNIER	physique CPEM
Mme ROIZEN	physique CPEM
DURAND M.	biologie animale SPCN
RAVIER	pétrographie
ROSEAU	T mécanique théorique des fluides
ROUBINE	électronique
SILBER	T chimie PCB
UEBERSFELD	T électronique
YVON	T théories physiques
HERVE	T mathématiques
JANCOVICI	physique atomique (Orsay)
FALK-VAIRANT	physique nucléaire (Orsay)
FETIZON	chimie propédeutique (Orsay)
CERF	mathématiques (Orsay)

PASCAUD	physiologie
Mme PETIT	biologie animale CPEM
BROUSSE	géologie (Orsay)
CAGNAC	physique agrégation (Orsay)
LEBERRE	zoologie (Orsay)
SCHAEFFER	microbiologie (Orsay)
DE GENNES	physique des solides (Orsay)
RIOU	physique nucléaire expérimentale (Orsay)
CLAUSER	chimie biologique (Orsay)
CHEVALIER	physiologie animale (Orsay)

REMERCIEMENTS

Il m'est très agréable de remercier, ici, Messieurs les Professeurs du Service de Physique Théorique et Hautes Energies et, en particulier, Monsieur le Professeur Maurice LEVY fondateur de ce groupe qui, par leur enseignement, ont assuré ma formation de chercheur en Physique Théorique.

Je suis également très reconnaissant à Monsieur le Professeur Louis MICHEL qui m'a fait souvent bénéficié de sa précieuse expérience de la Physique et à qui ma formation doit aussi beaucoup. Je lui suis, d'autre part, grandement redevable ainsi qu'à Messieurs Dimitri FOTIADI et Jean LASCOUX pour l'hospitalité dont j'ai bénéficié au Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique où j'ai préparé en partie cette thèse.

Plus directement, j'ai travaillé sous la direction de Monsieur le Professeur Philippe MEYER qui a montré un intérêt constant pour mes travaux. Au cours de discussions approfondies, il m'a prodigué de nombreux conseils judicieux. Il a étudié avec beaucoup de soin tous les manuscrits que je lui ai soumis au cours de mes recherches. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma profonde gratitude.

Monsieur le Professeur Michel GOURDIN a également toujours suivi mes travaux avec grand intérêt. Je lui suis très reconnaissant pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée.

Enfin, je remercie vivement, Messieurs Bernard DIU et Hector R. RUBINSTEIN car j'ai étudié l'approximation à une particule échangée en collaboration étroite avec eux.

TABLE DES MATIERES

Pages

INTRODUCTION 1

CHAPITRE I : L'AMPLITUDE $\rho\rho \to \rho\rho$ DANS L'APPROXIMATION DE L'UNITARITE ELASTIQUE 7

- I-A. Introduction, Caractéristiques générales de la méthode 7
- I-B. Autogénération du ρ par échange du ρ 14
- I-C. Influence de l'échange du ρ sur les autres ondes partielles 27
- I-D. Effet produit par l'échange de deux mésons π . . 31

CHAPITRE II : GENERATION DU ρ DANS L'APPROXIMATION A DEUX VOIES. 49

- II-A Introduction 49
- II-B Génération du ρ par les forces dues à l'échange d'une seule particule 55
- II-C Génération du ρ par les forces dues à l'échange de deux particules 76

CHAPITRE III : ETUDE DU K*

- III-A Introduction 95
- III-B Approximation à une particule échangée 99
- III-C Modèle tenant compte de forces à deux particules 112

CONCLUSION 133

INTRODUCTION

Devant le nombre toujours croissant de particules que les progrès de la physique expérimentale font découvrir [1], il devient nécessaire de déduire, au moins, une partie des particules existant dans la Nature d'une théorie dynamique des intéractions.

Ainsi, en 1959, Frazer et Fulco [2] ont prédit l'existence d'une résonance méson π - méson π de moment angulaire $\ell = 1$ et de spin isotopique $I = 1$ en étudiant la structure électromagnétique des nucléons. Cette particule instable, maintenant appelée ρ [1], a été effectivement découverte en 1961. Chew et Mandelstam [3] ont alors montré que l'existence du ρ produit une force importante dans l'onde partielle $\ell = 1$, $I = 1$ de la diffusion méson π - méson π . Ils ont proposé un mécanisme d'autogénération du ρ , ou encore de "bootstrap" [*] du ρ , où la force qui produit cette particule provient en grande partie de l'échange du ρ lui-même. Ils ont enfin tenté de calculer l'amplitude de diffusion $\pi - \pi$ en exprimant l'autoconsistance de la théorie c'est-à-dire en écrivant que les

---

(*) Le terme de "bootstrap" provient de l'expression américaine : "to lift one self up by his own bootstrap" qui signifie à peu près "se soulever soi-même par ses propres tirants de bottes". Nous utiliserons ce mot bien qu'il ne soit pas français car il est d'un usage courant. Il évoque l'idée de se soutenir ou de se créer soi-même.

voies croisées qui sont associées aux forces dans les relations de Mandelstam [4] sont identiques à la voie directe pour le problème $\pi - \pi$.

Les calculs de Chew et Mandelstam n'ont pas pu être entièrement menés à bien ; mais leur principe, qui est d'exprimer la symétrie de croisement dans des modèles dynamiques simples pour en déduire des équations d'autoconsistance, a été repris par de nombreux auteurs [5].

Parmi les approximations utilisées, l'une des plus fructueuses a été, jusqu'à présent, de ne considérer que les forces produites par l'échange d'une seule particule [6]. En effet, les équations d'autoconsistance que l'on obtient ainsi sont simples et assez faciles à résoudre numériquement. En particulier, Zachariasen et Zemach [7] ont étudié un modèle où le ρ est engendré uniquement par les forces dûes à l'échange du ρ lui-même approximées par les termes de Born. Ils ont pu ainsi calculer la masse du ρ et les constantes de couplages ($\rho \pi \pi$) et ($\rho \pi \omega$).

Depuis lors, il s'est avéré que les équations de bootstrap obtenues dans l'approximation à une particule échangée ont un lien tout à fait remarquable avec la situation expérimentale actuelle [8], en particulier, lorsqu'elles sont étudiées dans le cadre de la symétrie unitaire SU_3 [9]. Récemment même, Capps [10] a montré qu'il est intéressant de les considérer en connexion avec le groupe SU_6.

Un problème qui se pose, évidemment, est la validité de la méthode de bootstrap elle-même. Chew et Frautschi [11] ont émis l'hypothèse que toutes les particules peuvent être obtenues par un mécanisme d'autogénération à condition de considérer simultanément tous les éléments de la matrice S. Il est clair que ce postulat est impossible à vérifier exactement mais que l'étude de modèles simples peut donner une idée de sa validité.

Le modèle basé sur les forces dûes à l'échange d'une particule conduit en général à une solution autoconsistante bien définie et ceci tendrait à confirmer les idées de Chew et Frautschi. Malheureusement, les résultats numériques obtenus à l'aide de ce modèle ont été très décevants. Nous avons essayé, par exemple, B. Diu, H.R. Rubinstein et moi-même, de calculer les paramètres du K^* [1] à partir des forces produites par l'échange du ρ et du K^* seuls [12]. En résolvant les équations d'autoconsistance par la méthode proposée par Zachariasen et Zemach [7], nous avons trouvé que les résultats qualitatifs étaient corrects mais qu'il était impossible d'obtenir un accord même grossier avec l'expérience. L'étude des autres amplitudes mésoniques [8] a montré que ces résultats ne sont pas particuliers au problème du K^* (Nous rediscuterons cette question plus loin).

Cet échec numérique remet en question l'accord qualitatif obtenu car il conduit à penser qu'il n'est pas légitime d'approximer les forces par les termes d'échange d'une particule. De plus, on peut se demander alors si l'existence de la solution autoconsistante n'est pas liée au modèle de forces utilisé.

A ce point il apparaît donc nécessaire d'améliorer l'approximation des forces de façon à obtenir un meilleur accord quantitatif avec l'expérience. Ceci amène à considérer les forces produites par l'échange de plus d'une particule. Physiquement, ce sont les forces de plus longue portée qui doivent être dominantes. Dans les problèmes que nous allons considérer, certaines forces à deux particules ont une très grande portée. Nous allons donc proposer une méthode générale qui permet d'inclure les effets produits par l'échange de deux particules tout en conservant autant que possible la simplicité des équations étudiées par Zachariasen et Zemach. Pour cela, nous approximerons les termes correspondants par les contributions qui sont du quatrième ordre dans les constantes de couplage.

La méthode proposée est tout à fait générale, mais nous allons étudier seulement la génération des mésons vectoriels ρ et K^* dans les amplitudes de réaction des mésons pseudo-scalaires (π, K, η) [1]. Dans ces problèmes, le spin des mésons vectoriels introduit des divergences dans les diagrammes qui servent à calculer les forces à deux particules. Malgré tout, les parties absorptives de ces diagrammes sont finies et nous obtiendrons des contributions ayant un sens physique en ne considérant que les ondes S et P dans les voies croisées. Sur l'exemple de la diffusion $\pi - \pi$, nous montrerons que cette approximation se comprend en remarquant que les ondes partielles de moments angulaires élevés dans les voies croisées ne doivent pas beaucoup contribuer aux forces à longues portées.

Le chapitre I est consacré à la génération du ρ dans l'amplitude $\pi - \pi$ satisfaisant l'unitarité élastique. Après un rappel général des méthodes (paragraphe I-A), nous réétudions la solution de Zachariasen et Zemach (paragraphe I-B) et discutons l'influence du ρ sur les autres ondes partielles (I-C). Le paragraphe I-D est consacré à l'introduction des forces dûes à l'échange de deux mésons π non résonants suivant la méthode esquissée plus haut. Il apparait que la solution autoconsistante obtenue en I-B disparait avec l'introduction de ces nouvelles forces, mais que l'on obtient ainsi des forces qui, contrairement aux termes d'échange du ρ seul considérés en I-B, sont physiquement capables d'engendrer le ρ

Au chapitre II, nous améliorons l'approximation de l'unitarité en considérant un problème à deux voies couplées $\pi - \pi$ et $K\bar{K}$. L'approximation à une particule échangée conduit à introduire les forces produites par l'échange du ρ, du ω, du ϕ, et du K^* [1] (paragraphe II-B). Les équations d'autoconsistance ne permettent plus alors d'obtenir une solution unique ; mais, en supposant que le ρ est couplé universellement au courant de spin isotopique [13], on obtient une famille de solutions dépendant d'un paramètre. Celle-ci est qualitativement satisfaisante, mais loin

d'être en accord avec l'expérience. Au paragraphe II-C, au contraire, l'introduction des forces produites par l'échange de $\pi - \pi$ et de $K - \pi$ nous permettra d'améliorer considérablement l'accord avec l'expérience, ce qui confirmera les conclusions du chapitre I sur la validité du modèle de forces considéré.

Le chapitre III est consacré à l'étude du problème du K^* à l'aide des mêmes méthodes que celui du ρ . Après une introduction du problème (III-A), la génération du K^* par l'échange du ρ et du K^* est étudiée dans l'amplitude de diffusion $K - \pi$ satisfaisant l'unitarité élastique ainsi que dans un problème à deux voies couplées $K\pi$ - $K\eta$ (III-B). Au paragraphe III-C, nous introduisons les forces produites par l'échange de $\pi - \pi$ et de $K - \pi$. Les conclusions du chapitre III seront analogues à celles des chapitres I et II : les forces dûes à l'échange du ρ et du K^* apparaitront comme trop faibles, physiquement, pour engendrer le K^* ; alors que, avec l'inclusion des termes d'échange de $\pi - \pi$ et de $K - \pi$, nous obtiendrons un bien meilleur accord avec l'expérience.

Les aspects qualitatifs des solutions autoconsistantes seront étudiés en détail car il est très important de voir si les résultats qualitatifs obtenus dans l'approximation à une particule échangée subsistent lorsque l'on inclut les forces produites par l'échange de deux particules. Effectivement, si cela est vrai, ces résultats apparaitront comme ne dépendant pas du modèle des forces et l'on comprendra alors pourquoi ils sont en accord avec l'expérience bien que basés sur une approximation incorrecte à l'origine. On constatera que c'est effectivement le cas dans les problèmes considérés. Ce résultat, ainsi que l'amélioration des résultats numériques obtenue, nous permettra en conclusion de porter un jugement assez favorable sur la validité de la méthode employée pour engendrer les mésons ρ et K^*.

CHAPITRE I

L'AMPLITUDE $\pi\ \pi$ DANS L'APPROXIMATION DE L'UNITARITE ELASTIQUE

CHAPITRE I

L'AMPLITUDE π-π DANS L'APPROXIMATION DE L'UNITARITE ELASTIQUE

I-A - INTRODUCTION, CARACTERISTIQUES GENERALES DE LA METHODE

Expérimentalement, deux résonances ont été, jusqu'à présent, mises en évidence dans la diffusion méson π - méson π [1]. La première, appelée ρ dont il a déjà été question, apparait dans l'onde P pour un spin isotopique 1 ; sa masse est $m_\rho \simeq 763$ MeV et sa largeur $\Gamma_\rho \simeq 100$ MeV. La seconde, dénommée f°, est une résonance d'onde D de spin isotopique 0, de masse $m_{f°} \simeq 1.253$ MeV et de largeur $\Gamma_{f°} \simeq 100$ MeV.

Avant d'étudier ces résonances, nous allons d'abord rappeler succinctement les postulats qui sont à la base de la méthode des relations de dispersion en prenant l'amplitude π-π comme exemple [*].

Le diagramme correspondant au problème π - π est dessiné sur la figure (1) où $\underline{p_1}$, $\underline{p_2}$, $\underline{p_3}$, $\underline{p_4}$ représentent les impulsion-énergies

---

(*) Pour une étude plus complète de la question, nous renvoyons par exemple, au livre de Chew [4].

des particules qui diffusent, leurs indices de spin isotopique étant respectivement α, β, γ, δ.

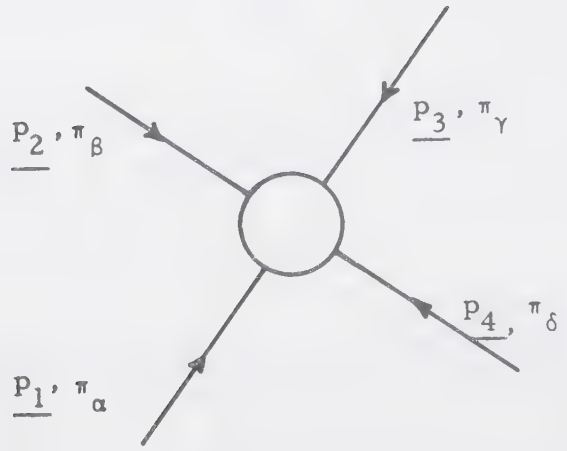


Figure (1)

Etant donné notre choix de la métrique d'espace-temps, les invariants utilisés dans la représentation de Mandelstam s'écrivent :

$$(I\text{-}1) \qquad s = -(\underline{p}_1 + \underline{p}_2)^2 \quad , \quad t = -(\underline{p}_1 + \underline{p}_3)^2 \quad , \quad u = -(\underline{p}_1 + \underline{p}_4)^2 \ .$$

Dans la suite, nous choisirons la masse du méson π comme unité de masse. Dans ces conditions, on a nécessairement :

$$(I\text{-}2) \qquad s + t + u = 4 \ .$$

Lorsque l'on utilise les relations de Mandelstam, on décrit simultanément trois réactions qui correspondent à des domaines de variation différents des variables s, t et u. Ainsi, à la réaction

$$\pi_\alpha\,(\underline{p}_1) + \pi_\beta\,(\underline{p}_2) \rightarrow \pi_\gamma\,(-\underline{p}_3) + \pi_\delta\,(-\underline{p}_4) \ ,$$

est associée la "région physique"

(I-3) $$s \geq 4 , \quad t \leq 0 , \quad u \leq 0 ;$$

nous l'appellerons "voie s". Les deux autres réactions : la "voie t" et la "voie u" sont définies respectivement par

$$\pi_\alpha(\underline{p_1}) + \pi_\gamma(\underline{p_3}) \rightarrow \pi_\beta(-\underline{p_2}) + \pi_\gamma(-\underline{p_4})$$

et par $$\pi_\alpha(\underline{p_1}) + \pi_\delta(-\underline{p_4}) \rightarrow \pi_\beta(-\underline{p_2}) + \pi_\gamma(-\underline{p_3}) .$$

Leurs régions physiques sont

(I-4) $$t \geq 4 , \quad s \leq 0 , \quad u \leq 0 ;$$

$$u \geq 4, \quad s \leq 0 , \quad t \leq 0 \quad .$$

Le méson π étant une particule sans spin, on déduit de la matrice S une amplitude de diffusion invariante de Lorentz en écrivant dans la voie s

(I-5) $$\langle -\underline{p_3}, -\underline{p_4} | \; S^I \; | \underline{p_1}, \underline{p_2} \rangle = \langle -\underline{p_3}, -\underline{p_4} | \; \underline{p_1}, \underline{p_2} \rangle$$

$$+ \frac{2i}{\sqrt{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4}} \; \delta_4 (\underline{p_1} + \underline{p_2} + \underline{p_3} + \underline{p_4}) \; T^I(s,t,u).$$

où les ω_i désignent les énergies des mésons π qui diffusent et où $I = 0, 1, 2$ est le spin isotopique total dans la voie s.

Le formalisme des relations de dispersions est basé sur le principe de substitution selon lequel on obtient les amplitudes de diffusion dans les voies t et u en prolongeant simplement $T^I(s,t,u)$ jusqu'aux régions définies par (I-4). Dans la voie t, par exemple, on en déduira ainsi trois amplitudes pour lesquelles I représente le spin isotopique total d'une particule finale ajouté à celui d'une particule initiale. Il y a donc lieu de faire un changement de base dans les états d'isospin de façon à faire apparaitre le spin isotopique total I' de l'état initial et de l'état final dans la voie t. La matrice de ce changement de base $\alpha^{II'}$ est appelée "matrice de croisement du spin isotopique" Comme Chew l'a souligné[4], elle joue un rôle crucial dans la détermination du signe des forces. Ses éléments sont simplement des produits de coefficients de Clebsch-Gordan et un calcul numérique simple montre que

$$\text{(I-6)} \quad \alpha^{II'} = \begin{array}{c} I \backslash I' \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & 5/3 \\ 1/3 & 1/2 & -5/6 \\ 1/3 & -1/2 & 1/6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Le problème π-π dont il est question ici est extrémement symétrique puisque les voies s, t et u décrivent toutes trois la diffusion π-π. Par conséquent, pour une même valeur du spin isotopique total dans chaque voie, les trois amplitudes de diffusion doivent être égales. Ceci, combiné au principe de substitution énoncé plus

haut entraine que les amplitudes $T^I(s,t,u)$ doivent satisfaire les relations

$$T^{I'}(t,s,u) = \sum_{I=0,1,2} \alpha^{I'I}\, T^I(s,t,u)$$

$$T^{I''}(u,t,s) = \sum_{I=0,1,2} \alpha^{I''I}\, T^I(s,t,u)$$

qui expriment ce qu'on appelle la symétrie de croisement. Comme nous l'avons déjà rappelé dans l'introduction, cette symétrie joue un rôle fondamental dans l'établissement des équations du bootstrap.

Nous allons chercher à engendrer des résonances dans la voie s. Dans ce cas, il est utile de considérer un développement en ondes partielles dans cette voie. En effet, les résonances n'apparaitront que dans l'onde partielle qui correspond à leur spin et à leur spin isotopique. Nous poserons

$$(I\text{-}7) \qquad t^{\ell I}(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{q(s)^{2\ell}} 2\pi \int_{-1}^{+1} P_\ell(\cos\theta)\, d(\cos\theta)$$

$$T^I(s, -2q^2(s)(1-\cos\theta), -2q^2(s)(1+\cos\theta)).$$

où $q(s)$ et $\cos\theta$ sont, respectivement, l'impulsion et l'angle de diffusion dans le centre de masse de la voie s :

$$(I\text{-}8) \qquad q(s) = \frac{1}{2}\sqrt{s-4} \qquad \cos\theta = 1 + \frac{2t}{(s-4)} \ .$$

Dans l'égalité (I-7), le facteur 1/2 est destiné à tenir compte de l'identité des mésons π . D'autre part, on déduit de la représentation de Mandelstam que l'intégrale qui figure au second membre de cette équation s'annule comme $q(s)^{2\ell}$ lorsque s tend vers 4. C'est pourquoi le facteur $1/q^{2\ell}$ qui apparait dans la relation (I-7) n'introduit pas de singularités cinématiques. Nous verrons plus loin qu'il permet d'obtenir une relation de dispersion convergente pour la fonction N(s) que l'on introduit dans la méthode N/D. Enfin, il faut remarquer que, d'après la statistique, $t^{\ell I}(s)$ n'est différent de zéro que si ℓ' et I sont tous deux pairs ($\ell = 2p$, $I = 0$ ou 2) ou tous deux impairs ($\ell = 2p + 1$, $I = 1$).

A partir de la représentation de Mandelstam, on démontre que l'onde partielle $t^{\ell I}(s)$ est une fonction analytique de s dans un plan coupé. Les coupures de $t^{\ell I}$ sont déduites de celles de l'amplitude totale à l'aide de (I-7). On obtient ainsi deux coupures : une coupure dite " de droite " ou " physique " qui correspond à la coupure $s \geq 4$ de l'amplitude totale, et une coupure dite " de gauche " ou " non physique " qui est la projection par (I-7) des coupures $t \geq 4$ et $u \geq 4$ de $T^I(s,t,u)$.

La position de la coupure de gauche se calcule de la façon suivante : l'échange d'un état de masse $\sqrt{t'}$ dans la voie t produit une coupure pour les valeurs de s qui sont telles que de dénominateur

$$t' - t = t' + 2q^2 (1 - \cos\theta)$$

s'annule dans le domaine d'intégration de (I-7). Cette condition est équivalente à

(I-8) $$-\infty \leq s \leq 4 - t'.$$

En faisant varier t' de 4 à $+\infty$ on en déduit que la coupure de gauche produite par la coupure $t \geq 4$ de l'amplitude totale apparait pour

(I-9) $$-\infty < s \leq 0.$$

Un raisonnement analogue appliqué à la coupure $u \geq 4$ montre que sa projection est aussi donnée par (I-9). (Ceci, est dû à l'identité des deux voies croisées).

Le saut de $t^{\ell I}(s)$ sur la coupure de gauche caractérise les forces qui produisent la diffusion. Dans cette étude nous ne considérons que les forces qui ont la plus longue portée. En terme de relation de dispersion cela revient à supposer que les singularités non physiques les plus proches de la région physique sont dominantes. Cette hypothèse se comprend en remarquant que l'"effet" d'une singularité suit une sorte de loi de Poisson en fonction de la distance.

A partir du saut de $t^{\ell I}(s)$ sur la coupure de gauche, on peut, en principe, déterminer l'onde partielle par la méthode N/D. Malheureusement, la présence de canaux inélastiques que l'on ne sait pas traiter oblige à de nouvelles approximations. Dans toute cette partie nous supposerons pour simplifier que l'unitarité élastique est valable sur toute la coupure de droite. Nous poserons donc, d'après (I-5) et (I-7)

(I-10) $$\text{Im}\, t^{\ell I}(s) = \frac{q(s)}{\sqrt{s}}^{2\ell+1} \left| t^{\ell I}(s) \right|^2 \quad \text{pour } s \geq 4.$$

Strictement parlant cette égalité n'est vérifiée que jusqu'à $s = 16$ qui est le seuil de l'état à quatre mésons π . En réalité, il est raisonnable de penser que la contribution de cet état dans l'unitarité viendra surtout des termes où les π forment entre eux des états résonants, c'est-à-dire des termes où les quatre π sont dans l'état $\pi + \omega$

ou $\rho + \rho$. Si donc on ne considère pour simplifier que les états à deux particules, la relation (I-I0) sera valable jusqu'au seuil de l'état $\pi + \omega$ ($s \simeq 53$) c'est-à-dire dans une assez grande partie de la coupure de droite.

I-B - AUTOGENERATION DU ρ PAR ECHANGE DU ρ

Nous reprenons ici les calculs de Zachariasen et Zemach [7] de façon à préciser les résultats obtenus par ces auteurs. Cela nous permettra, également, de montrer que l'on améliore les résultats en ajoutant les forces dûes à l'échange de deux mésons π .

Dans le modèle proposé par Zachariasen et Zemach, on ne tient compte que des forces dûes à l'échange du ρ et on les approxime par les termes de Born. Cela conduit à considérer les diagrammes de la figure (2).

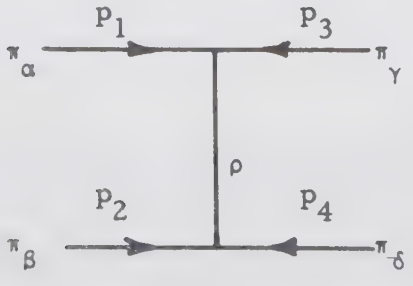


figure 2-a

Echange du ρ dans la voie t

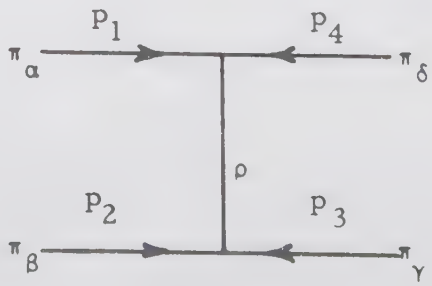


figure 2-b

Echange du ρ dans la voie u

Figure (2)

La constante de couplage $\rho - \pi - \pi$ sera définie par le Hamiltonien phénoménologique :

$$\mathcal{H} = f_\pi \left(\vec{\pi} \times \partial_\mu \vec{\pi} \right) \rho_\mu \tag{I-12}$$

ceci permet de calculer la contribution de l'échange du ρ dans la voie t (figure 2-a) :

$$B_{\alpha\beta\gamma\delta}(s,t) = \frac{1}{8} \left(\frac{f_\pi}{2\pi} \right)^2 \frac{s-u}{m_p^2 - t} \, \epsilon_{\alpha\gamma k} \, \epsilon_{\beta\delta k} \tag{I-13}$$

Nous projetterons ce terme de Born sur les ondes partielles de la voie s en posant

$$B^{\ell I}(s) = 2\pi \int_{-1}^{+1} d(\cos\theta) \, P_\ell(\cos\theta) \, \langle I \mid B_{\alpha\beta\gamma\delta}(s, -2q^2(1-\cos\theta)) \mid I \rangle$$

où q et $\cos\theta$ sont donnés par (I-8).

On peut écrire, si l'on extrait les facteurs de spin isotopique,

$$B^{\ell I}(s) = \frac{f_\pi^2}{4\pi} \; 2 \; \alpha^{I\,1} \, F^{\ell\,1}(s, m_p^2) \; . \tag{I-14}$$

Dans cette égalité, $\alpha^{I\,1}$ est l'élément de la matrice de croisement du problème $\pi - \pi$ (voir (I-6)), de plus nous avons introduit une fonction $F^{\ell\,1}(x, y)$ qui est définie en général par la relation

$$(I\text{-}15\text{-}a) \qquad F^{\ell\, 1}(x,\, y) = \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} dv \quad P_{\ell}\,(v)\, \frac{a+v}{b-v}$$

où $(I\text{-}15\text{-}b)$ $a = 1 + \dfrac{x}{2q^2(x)}$, $b = 1 + \dfrac{y}{2q^2(x)}$.

Elle est associée à la projection sur l'onde partielle ℓ de l'échange d'une particule de spin 1 et de masse y.

Nous allons étudier l'onde partielle $\ell = 1$, $I = 1$ de la voie s qui correspond aux nombres quantiques du ρ dans cette voie. Puisque nous approximons les forces par les termes d'échange du ρ, nous allons supposer que la coupure de gauche de l'onde partielle est simplement donnée par les diagrammes de la figure (2). Si l'on pose donc, compte tenu de (I-7), :

$$g(s) = \frac{1}{q^2(s)} \quad B^{11}(s)\,,$$

le saut sur la coupure de gauche sera donné par

$$(I\text{-}16) \qquad \mathrm{Im}\, t(s) = \mathrm{Im}\, g(s)$$

(pour alléger l'écriture nous écrirons t(s) au lieu de $t^{\ell\, I}(s)$ lorsque $\ell = 1$, $I = 1$).

D'après (I-8), la coupure dûe à l'échange du ρ commence à $s = 4 - m_\rho^2$; d'autre part, g(s) s'écrit explicitement d'après (I-14) et (I-6)

$$(I\text{-}17) \qquad g(s) = \frac{1}{q^2} \quad \frac{f_\pi^{\,2}}{4\pi} \quad F^{1\ 1}\ (s,\, m_\rho^{\,2})\,.$$

La fonction $F^{1\,1}(s, m_\rho^2)$ étant positive sur la coupure de droite, on constate que g(s) est positif sur cette coupure. Nous verrons plus loin que ce signe correspond à l'attraction. L'échange du ρ produit donc une force attractive pour les nombres quantiques correspondant au ρ dans la voie directe. Comme Chew et Mandelstam [3] l'ont souligné, ce résultat qui est lié, d'après (I-14) au signe de α^{11}, est essentiel pour l'autogénération du ρ. D'un autre côté, il est très satisfaisant de constater que le modèle à une particule échangée conduit à une force attractive pour $\ell = 1$, $I = 1$, là où précisément il existe une résonance.

Nous allons maintenant calculer t(s) à partir de son saut sur la coupure de gauche à l'aide de la méthode N/D. Cette méthode consiste à poser

$$t(s) = N(s)/D(s), \tag{I-18}$$

où N(s) et D(s) sont deux fonctions analytiques de s qui ne possèdent, respectivement, que la coupure de gauche et que la coupure de droite de l'onde partielle. Cela ne définit pas N et D de façon unique, mais on peut toujours écrire l'onde partielle sous cette forme si on néglige l'inélasticité comme nous le faisons ici. En effet, une expression explicite de D a été indiquée par Omnès [14]

$$D(s) = \exp\left[-\frac{s-s_o}{\pi}\int_4^\infty ds' \frac{\delta(s')}{(s'-s)(s'-s_o)}\right] \tag{I-19}$$

où $\delta(s)$ est le déphasage. D(s) défini par (I-19) ne possède évidemment que la coupure de droite. Sur cette coupure sa phase est $e^{-i\delta}$ tandis que celle de t(s) est $e^{i\delta}$; par conséquent, N(s) y est réelle et ne

possède donc effectivement que la coupure de gauche de l'onde partielle. Dans (I-19), on a utilisé le fait que N et D ne sont définis qu'à un facteur près pour normaliser D à 1 au point de soustraction s_o.

On établit les équations de la méthode N/D en utilisant des relations de dispersion pour N et D.

a) puisque D est réelle sur la coupure de gauche, ImN s'écrit

$$\text{Im } N(s) = D(s)\,\text{Im } t(s) = D(s)\,\text{Im } g(s). \tag{I-20}$$

N(s) n'ayant que la coupure de gauche, on obtient la relation de dispersion

$$N(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{4-m_\rho^2} ds'\, D(s')\, \frac{\text{Im } g(s')}{(s'-s)} \quad . \tag{I-21}$$

L'intégrale qui figure au second membre de cette égalité est convergente puisque d'après (I-17)

$$\text{Im } g(s) = \frac{\pi}{4}\, \frac{(f_\pi^2/4\pi)}{q^2(s)} \left(\frac{4s+2m_\rho^2-4}{s-4}\right)\left(1+\frac{2m_\rho^2}{s-4}\right) \tag{I-22}$$

ce qui montre Im g tend vers zéro lorsque s tend vers moins l'infini. Il faut bien remarquer que le facteur $1/q^2$ qui apparait dans (I-22) est essentiel pour faire converger l'intégrale (I-21). En effet les deux autres facteurs de (I-22) tendent vers des constantes ; de plus, D(s) ne peut pas tendre vers zéro à l'infini sans que l'on n'impose à N(s) de s'annuler également sous peine d'obtenir une onde partielle singulière à l'infini. C'est pourquoi, pour définir l'onde partielle, nous avons introduit un facteur $1/q^{2\ell}$ dans la relation (I-7).

b) Sur la coupure de droite, c'est au contraire N(s) qui est réel. Le saut de D s'écrit, d'après (I-10),

$$\text{(I-23)} \qquad \text{Im } D(s) = \text{Im } \left[1/t(s) \right] \; N(s) = - \frac{q^3(s)}{\sqrt{s}} \; N(s) \; .$$

Une relation de dispersion permet alors de calculer D à partir de N.

$$\text{(I-24)} \qquad D(s) = 1 - \frac{s-s_o}{\pi} \int_4^\infty ds' \; \frac{q^3(s')}{\sqrt{s'}} \; \frac{N(s')}{(s'-s)(s'-s_o)} \; .$$

Comme en (I-19), nous avons fait une soustraction et normalisé D à 1 au point s_o.

Les relations (I-21) et (I-24) constituent un système d'équations couplées qui permet, en principe, de déterminer N et D, donc t(s) à partir de g(s). On peut, en particulier, éliminer D entre (I-21) et (I-24) de façon à établir une équation intégrale pour N(s). On obtient ainsi, en remarquant que g(s) ne possède par définition que la coupure de gauche de t(s) :

$$\text{(I-25)} \qquad N(s) = g(s) + \frac{1}{\pi} \int_4^\infty \frac{q^3(s')}{\sqrt{s'}} \left\{ (s'-s_o)\, g(s') - (s-s_o)\, g(s) \right\} \frac{N(s')}{(s'-s)(s'-s_o)} \; ds'$$

On résoudra (I-25) par itération et déduira D de N par (I-24).

Revenons, maintenant, aux calculs de Zachariasen et Zemach. Dans l'approximation proposée par ces auteurs, on ne garde que la première itération de (I-25). On écrit alors, simplement

(I-26) $$N(s) = g(s),$$

on déduit D de N par (I-24) de façon à obtenir une onde partielle qui soit, malgré tout, unitaire sur la coupure de droite :

(I-27) $$D(s) = 1 - \frac{s-s_o}{\pi} \int_4^\infty \frac{q^3(s')}{\sqrt{s'}} \frac{g(s')\,ds'}{(s'-s)(s'-s_o)} .$$

Dans cette approximation, (I-26) et (I-27) déterminent l'onde partielle t(s). Supposons qu'il existe une résonance de masse m dans la voie s. D(s) doit satisfaire la condition

(I-28) $$\mathrm{Re}\ D(m^2) = 0$$

qui entraine que le déphasage passe par $\pi/2$ pour $s = m^2$. La largeur Γ de cette résonance peut alors se calculer en identifiant t(s) au voisinage de $s = m^2$ avec une formule de Breit et Wigner. Pour cela on développe D(s) :

$$D(s) = (s-m^2)\ \mathrm{Re}\ D'(m^2) + i\ \mathrm{Im}\ D(m^2)$$

où Re $D'(m^2)$ est la dérivée de Re D au point $s = m^2$.

Avec nos conventions, la formule de Breit et Wigner s'écrit :

$$t_{BW}(s) = - \frac{m^2}{q^2(m^2)} \frac{\Gamma}{s-m^2 + i\,\Gamma\,m}$$

d'où, en identifiant

$$\Gamma = \frac{1}{m} \quad \frac{\mathrm{Im}\, D(m^2)}{\mathrm{Re}\, D'(m^2)} \quad . \tag{I-29}$$

Les équations d'autoconsistance seront obtenues en écrivant que la résonance qui apparait dans la voie s est en fait la même que celle qui fournit les forces. Re D devra donc s'annuler pour $s = m_\rho^2$ et la largeur Γ donnée par (I-29) devra être identique à la largeur du ρ :

$$\Gamma_\rho = \frac{2}{3} \quad \frac{f_\pi^2}{4\pi} \quad \frac{1}{m_\rho^2} \quad q^3(m_\rho^2) \, . \tag{I-30}$$

Ceci conduit au système d'équations

$$f_\pi^2/4\pi = 1 \; / \; G(m_\rho^2, m_\rho^2) \tag{I-31-a}$$

$$f_\pi^2/4\pi = \frac{3}{2} \quad \frac{F^{1\,1}(m_\rho^2, m_\rho^2)}{q^2(m_\rho^2)\, G'(m_\rho^2, m_\rho^2)} \tag{I-31-b}$$

où, d'après (I-26) et (I-27),

$$G(s, m_\rho^2) = \frac{s - s_o}{\pi} \; P \int_4^\infty \frac{q(s')}{\sqrt{s'}} \quad \frac{F^{1\,1}(s', m_\rho^2)}{(s'-s)(s'-s_o)} \quad , \tag{I-32}$$

$$G'(s, m_\rho^2) = \frac{\partial}{\partial s} \quad G(s, m_\rho^2) \, . \tag{I-33}$$

On voit bien, ici que le cas où g est positif sur la coupure de droite correspond à l'attraction. En effet G est alors positif et Re D peut

s'annuler puisque

$$\mathrm{Re}\ D = 1 - f_\pi{}^2/4\pi \quad G .$$

Lorsque s est inférieur au seuil s = 4, il n'y a plus de symbole de partie principale dans l'expression de $G(s, m_\rho{}^2)$. D'autre part G et G' sont toutes deux des fonctions continues de s pour s= 4 car $F^{1\,1}(s, m_\rho{}^2)$ s'annule comme (s-4) lorsque s tend vers 4.

Les relations (I-31) doivent être considérées comme un système de deux équations pour les deux inconnues $m_\rho{}^2$ et $f_\pi{}^2/4\pi$. Nous résoudrons ce système en cherchant les intersections des deux courbes correspondantes dans le plan ($m_\rho{}^2$, $f_\pi{}^2/4\pi$). Pour cela nous avons calculé numériquement, à l'aide d'une I. B. M. 7090, les quantités G, G', $F^{1\,1}$ qui apparaissent en (I-31) pour plusieurs valeurs de $m_\rho{}^2$.

Il apparaitra que la solution que l'on obtient dépend en réalité du point de soustraction s_o. Cela est dû à l'approximation utilisée pour calculer t(s) à partir de g(s). En effet, l'onde partielle obtenue en résolvant exactement le système des équations (I-21) et (I-24) est, comme nous l'avons déjà souligné, indépendante de s_o.

Nous choisirons s_o de façon que l'expression approchée de t(s) qui est fournie par (I-26) et (I-27) soit aussi proche que possible de la solution exacte des équations (I-21) et (I-24). Pour cela on remarque que, si l'on suppose que N(s) est égal à g(s), cela revient à remplacer D(s') par 1 dans l'intégrale qui figure au second membre de (I-21). En effet g(s) satisfait la relation de dispersion

$$g(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{4 - m_\rho^2} \frac{\mathrm{Im}\, g(s')}{(s'-s)}\, ds' \ .$$

Puisque D est rigoureusement égal à 1 au point s_o, on placera le point de soustraction au début de la coupure de gauche dans la région où l'intégrand de (I-21) est maximum. On peut alors espérer que D(s') restera voisin de 1 dans la partie du domaine d'intégration qui fournit la contribution principale et que, par conséquent, N(s) sera aussi voisin que possible de g(s).

D'un autre côté, puisque $D(s_o) = 1$ il est clair que :

$$t(s_o) = g(s_o) \ .$$

Il faudra donc, également, placer s_o en un point de la coupure de gauche où l'on peut penser que g(s) est une bonne approximation de t(s), c'est-à-dire en un point où les forces que l'on a négligées contribuent peu.

Revenons maintenant aux équations d'autoconsistance. La relation (I-31-b) ne dépend pas de s_o. $F^{1\,1}(s, m_\rho^2)$ a un point de branchement logarithmique pour $s = 4 - m_\rho^2$ qui correspond au début de la coupure de gauche. Ceci fait que $F^{1\,1}(m_\rho^2, m_\rho^2)$ devient infini pour $m_\rho^2 = 2$. Sur la figure (3) la courbe (2) décrit la relation entre $f_\pi^2/4\pi$ et m_ρ^2 qui découle de (I-31-b).

Au contraire, (I-31-a) dépend de s_o. La coupure de gauche dûe à l'échange du ρ commence, d'après (I-8), en $s'_1 = 4 - m_\rho^2$. Si l'on suppose, pour fixer les idées que l'état suivant qu'il faut considérer est formé de deux ρ, on obtient, toujours d'après (I-8), un second point de branchement en $s'_2 = 4 - 4\, m_\rho^2$. D'après les arguments qualitatifs précédents, s_o doit satisfaire la condition

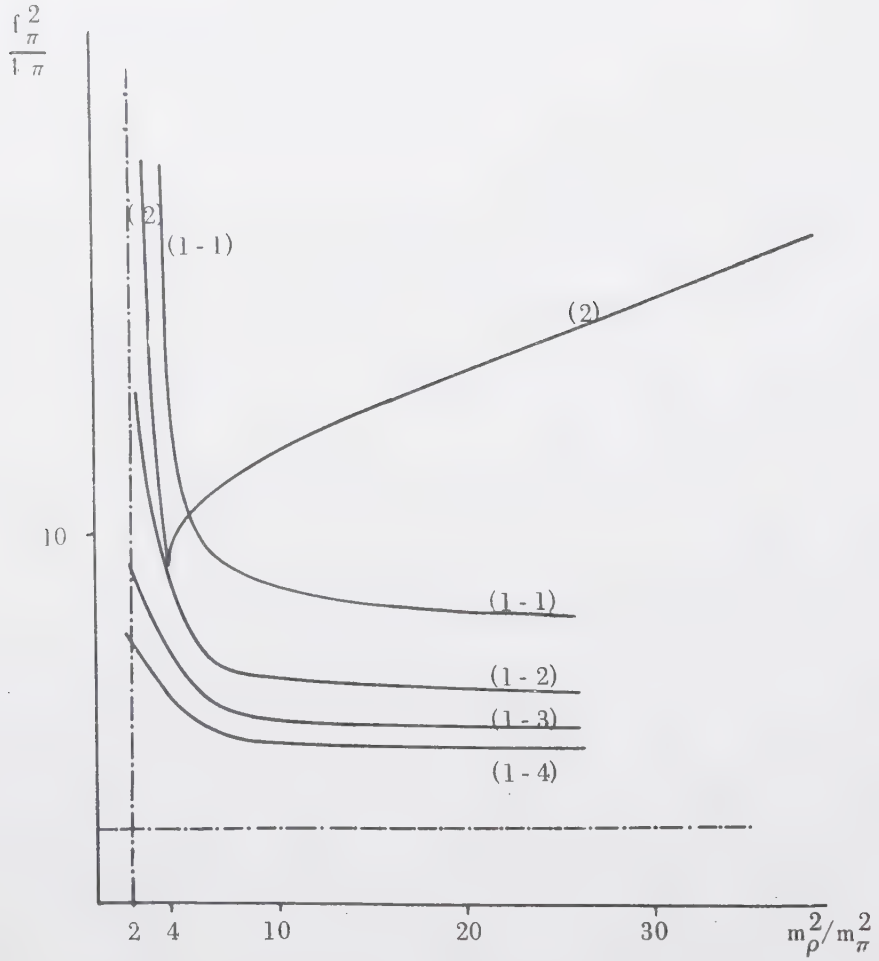


figure (3)

Relations entre $f_\pi^2/4\pi$ et m_ρ^2 déduites des équations d'autoconsistance.

(I-34) $$s'_2 \leq s_o \leq s'_1 .$$

Puisque s'_1 et s'_2 sont des fonctions linéaires de m_ρ^2, nous poserons

(I-35) $$s_o = 4 - \alpha m_\rho^2 .$$

Le paramètre α sera pris successivement égal à 1 (c'est-à-dire $s_o = s_1$) à 2, à 3 et à 4 (c'est-à-dire $s_o = s'_2$). Sur la figure 3, la courbe qui représente (I-31-a) pour une valeur donnée de α a été numérotée $(1-\alpha)$. D'après (I-32), $G(s, m_\rho^2)$ s'annule pour $s = s_o$. Par conséquent la valeur de $f_\pi^2/4\pi$ donnée par l'équation (I-31-a) devient infinie lorsque $m_\rho^2 \to s_o$; c'est-à-dire, suivant (I-35), lorsque

$$m_\rho^2 \to 4/(1+\alpha) .$$

Pour une valeur donnée de α , la solution autoconsistante est déterminée, en principe, par l'intersection des courbes $(1-\alpha)$ et (2) de la figure (3). Le cas où $\alpha = 1$ correspond exactement au choix de s_o fait par Zachariasen et Zemach [7] ; par conséquent, l'intersection des courbes (1-1) et (2) redonne la solution indiquée par ces auteurs [*].

(I-36) $$m_\rho \simeq 320 \text{ MeV} \qquad f_\pi^2/4\pi \simeq 10 \qquad \Gamma_\rho \simeq 50 \text{ MeV}$$

tandis que les valeurs expérimentales sont, rappelons le :

$$m_\rho \simeq 765 \text{ MeV} \qquad f_\pi^2/4\pi \simeq 2 \qquad \Gamma_\rho \simeq 100 \text{ MeV}.$$

(*) Il y a une erreur d'un facteur 4 dans les résultats de la référence (7). La véritable solution est indiquée par Zachariasen : "Strong Interaction and High Energy Physics" (Oliver et Boyd) p. 371.

Il apparait donc, en conclusion, que l'on peut qualitativement engendrer le ρ de façon autoconsistante dans l'approximation de Zachariasen et Zemach. La solution obtenue est cependant loin d'être satisfaisante :

a) L'accord avec les résultats expérimentaux n'est pas très bon. En particulier, la valeur calculée de $f_\pi^2/4\pi$ est beaucoup trop grande.

b) Sur la figure (3) on voit que la courbe (1-1) est toujours, au dessus de la valeur physique $f_\pi^2/4\pi = 2$. Il en résulte que, si l'on met la valeur physique de $f_\pi^2/4\pi$ dans l'expression de g(s), il deviendra impossible d'engendrer une résonance dans la voie s puisque R_D ne pourra plus s'annuler. Ceci montre que les forces dûes à l'échange du ρ seul sont physiquement incapables d'engendrer le ρ dans la voie s car elles sont trop faibles pour lier ensemble les deux π.

c) Si l'on fait varier α on s'aperçoit, en examinant la figure (3), que le choix de s_o est essentiel pour l'existence de la solution autoconsistante. En effet, la courbe (2) a un point de rebroussement pour $m_\rho^2 = 4$. Si s_o est trop négatif ($\alpha = 3$ ou 4), la courbe ($1-\alpha$) qui a une asymptote pour $m_\rho^2 = 4/(1+\alpha)$, est trop basse pour couper la courbe (2) et il n'y a plus de solution. Ceci fait douter fortement de la validité de la solution (I-36) puisque la solution exacte ne dépend pas en fait de s_o.

d) Au contraire, si s_o est choisi au début de la région définie par (I-34), il apparait deux solutions autoconsistantes pour une valeur donnée de α (ceci correspond, à peu près, aux valeurs de α comprises entre 1 et 2). L'une de ces solutions est proche de la solution de Zachariasen et Zemach ; l'autre, qui est toujours en dessous du seuil $s = 4$, conduirait

à prédire un état lié π-π .(*)

Les résultats de ce paragraphe sont donc encourageants puisque le modèle à une particule échangée est qualitativement satisfaisant. Il apparait cependant nécessaire d'améliorer les approximations utilisées de façon à corriger les défauts de ce modèle que nous venons de mettre en évidence.

°

° °

I-C- INFLUENCE DE L'ECHANGE DU ρ SUR LES AUTRES ONDES PARTIELLES.

Supposons, pour le moment, que le ρ s'engendre lui-même dans l'approximation discutée précedemment. Cela conduit à penser que la force dûe au ρ pourrait être aussi dominante pour les autres valeurs de ℓ et de I. Nous allons partir de la solution de Zachariasen et Zemach (I-26) et analyser l'influence de la force ainsi déterminée sur les autres ondes partielles.

(*) Après que nous ayons, avec B. Diu et H. R. Rubinstein, mis en évidence l'existence de deux solutions dans l'approximation de la référence (7) (v. réf. (8)). Abers et Zachariasen (15) ont montré que cette propriété est en fait générale et ne dépend pas de l'approximation utilisée pour résoudre les équations N/D.

Comme au paragraphe (I-B), le calcul est basé sur la méthode N/D, les équations étant analogues à (I-21) et (I-24).

Il y a lieu de remarquer, malgré tout, que le facteur $1/q^{2\ell}$ que nous avons introduit dans la définition (I-9) de $t^{\ell I}(s)$ n'assure la convergence de la relation de dispersion que l'on écrit pour $N(s)$ que lorsque ℓ est différent de zéro. Pour l'onde S on ne peut éviter de faire une soustraction. Il s'introduit alors un nouveau paramètre inconnu qui, physiquement, représente l'effet des forces à très courte portée. En conséquence, la théorie que nous étudions ne permet pas d'engendrer les particules de spin zéro.

Physiquement, on peut le comprendre en remarquant que, pour un moment orbital nul, il n'y a pas de force centrifuge. Les deux mésons π sont alors beaucoup plus près l'un de l'autre et leur diffusion est, par conséquent, beaucoup plus sensible aux forces à courtes portées. Il n'est donc pas surprenant qu'une théorie basée sur les forces à longue portée se révèle inadéquate pour étudier la diffusion dans l'onde S.

Revenons maintenant au cas où ℓ est différent de zéro. L'idée générale est qu'une théorie complète basée sur un mécanisme de bootstrap devrait commencer par déterminer les résonances de plus faibles masses de façon à utiliser ensuite ces résonances pour engendrer celles qui se trouvent à des énergies plus hautes. Il est bien clair que l'on ne peut pas attendre grand chose d'un calcul quantitatif. Malgré tout, il est intéressant d'étudier les aspects qualitatifs de la théorie et de les comparer avec l'expérience.

Pour l'onde partielle ℓ, I, la fonction $g^{\ell I}(s)$ qui donne le saut sur la coupure de gauche produit par l'échange du ρ s'écrit,

d'après (I-14) :

$$(I\text{-}38) \qquad g^{\ell\, I}(s) = f_\pi{}^2/4\pi \; \frac{2}{q^{2\ell}(s)} \; \alpha^{I\ 1} F^{\ell\ 1}(s,\ m_\rho{}^2) \ .$$

$F^{\ell\ 1}$ qui est défini par (I-15), peut se mettre sous la forme.

$$(I\text{-}40) \quad F^{\ell\ 1}(x,y) = \frac{1}{2}\left\{ a\, Q_\ell\,(b) + \frac{\ell+1}{2\ell+1}\, Q_{\ell+1}(b) + \frac{\ell}{2\ell+1}\, Q_{\ell-1}(b) \right\}$$

où a et b sont donnés par (I-15-b), Q_ℓ étant la fonction de Legendre de deuxième espèce.

1/ Cas où I = 0

ℓ doit être pair selon la statistique. D'après (I-6), $\alpha^{0\ 1}$ est positif. L'échange du ρ est donc attractif. En particulier pour $\ell = 2$

$$(I\text{-}41) \quad g^{20}(s) = \frac{f_\pi{}^2}{4\pi} \; \frac{1}{q^4(s)} \; \frac{1}{4}\,(a+b)\left\{ (3b^2-1)\,\mathrm{Log}\,\frac{b+1}{b-1} - 6\,b \right\} \ .$$

On engendre une résonance dans cette onde partielle de la même façon qu'au paragraphe (I-B), excepté que $f_\pi{}^2/4\pi$ et $m_\rho{}^2$ sont supposés fixés par (I-36). De cette façon on prédit une résonance pour

$$m \simeq 420 \text{ MeV} \quad , \qquad \Gamma \simeq 70 \text{ MeV} \ .$$

Comme nous l'avons déjà indiqué, il existe effectivement une résonance pour $\ell = 2$ et $I = 0$ appelée f° dont les paramètres sont [1]

$$m_{f^\circ} \simeq 1253 \text{ MeV} \qquad \Gamma_{f^\circ} \simeq 100 \text{ MeV}.$$

Comme pour le ρ , la masse calculée est bien inférieure à la masse exacte, malgré tout l'accord qualitatif est très intéressant.

2/ Cas où $I = 1$

ℓ doit être pair. Il y a attraction puisque le ρ s'engendre lui-même. Pour l'onde partielle $\ell = 3$ on peut refaire un calcul analogue à celui qui a permis d'engendrer le f°. On obtient alors un pôle dont les paramètres sont

$$m = 900 \text{ MeV} \qquad \Gamma = 600 \text{ MeV}.$$

Ces chiffres montrent que l'on ne prédit pas vraiment de résonance puisque la valeur calculée de Γ est presque égale à m.

3/ Cas où $I = 2$

α^{21} étant négatif, l'échange du ρ est répulsif. On prédit donc qu'il n'existe pas de résonance π-π de spin isotopique 2. Ceci est, jusqu'à présent, en accord avec l'expérience [1].

Il apparait donc, finalement, que le modèle ou seul le ρ est échangé est qualitativement correct aussi pour les autres ondes partielles que celle ou apparait le ρ ; puisqu'il conduit à un signe des forces qui est compatible avec les nombres quantiques de la seule résonance $\pi\pi$ mise en évidence actuellement en dehors du ρ .

I-D-EFFET PRODUIT PAR L'ECHANGE DE DEUX MESONS π .

Dans ce paragraphe, nous tentons de déduire de meilleurs résultats numériques des conditions d'autoconsistance en améliorant l'approximation de la coupure de gauche.

Il est clair que l'on peut calculer les paramètres du ρ à l'aide d'équations autoconsistantes sans supposer que les forces sont dûes uniquement à l'échange du ρ . Il faut pour cela seulement que l'expression des forces ne fasse pas intervenir d'autre paramètre que m_ρ et f_π .

Aux forces d'échange du ρ considérées précédemment, nous allons ajouter les forces dûes à l'échange de deux π non résonants. Il est naturel d'inclure ces forces car elles ont une très longue portée. De plus on verra que, ce faisant, on arrive à satisfaire de façon plus satisfaisante la symétrie de croisement du problème $\pi - \pi$.

I-D-1- Détermination des forces dûes à l'échange de deux mésons π .

Les diagrammes correspondant aux nouvelles forces considérées sont dessinés sur la figure (4).

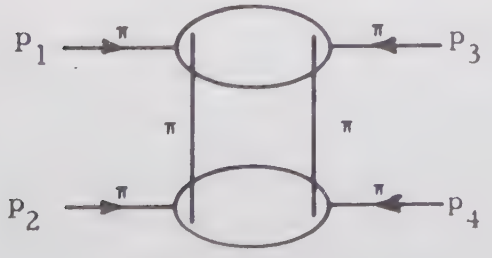


Figure (4-1)

Echange de deux π dans la voie t

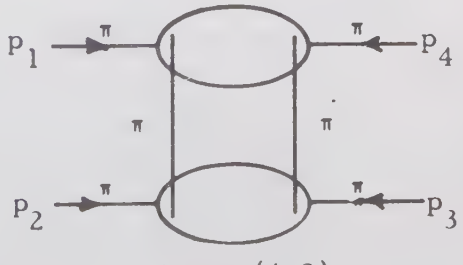


Figure (4-2)

Echange de deux π dans la voie u

Figure (4)

Pour ne pas détruire l'autoconsistance de la théorie, nous approximerons ces diagrammes de façon à ne faire intervenir que les paramètres du ρ. Pour cela nous tiendrons compte de ces forces au quatrième ordre en f_π en remplaçant les diffusions $\pi - \pi$ qui apparaissent sur la figure (4) par les termes d'échange du ρ. Ceci conduit à considérer les diagrammes qui sont représentés par la figure (5) (*)

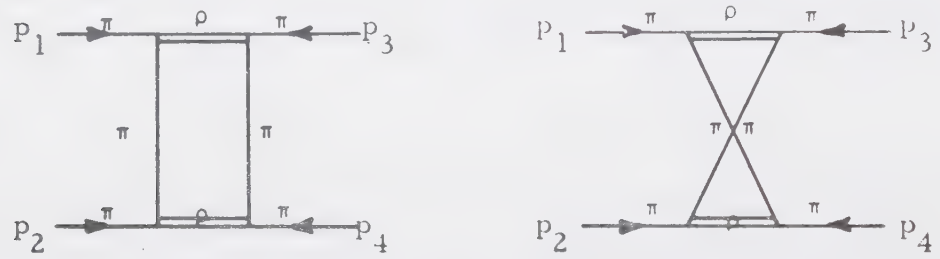


Figure 5-1 - Echange de deux π dans la voie t à l'ordre 4.

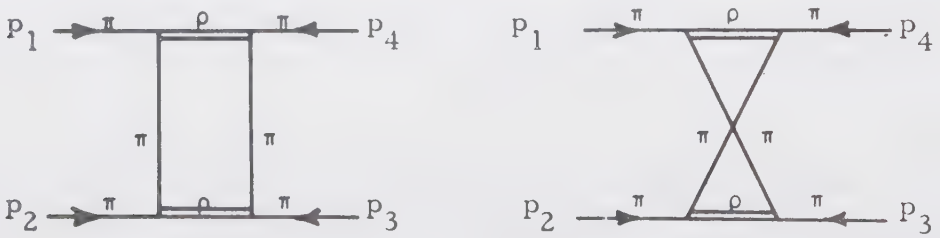


Figure 5-2 - Echange de deux π dans la voie u à l'ordre 4.

Figure (5)

(*) Si l'on remplace l'une des diffusions $\pi - \pi$ par la contribution du ρ dans la voie où les deux π sont échangés on obtient des diagrammes qui ne décrivent pas la force dûe à l'échange de deux π mais qui donnent simplement un terme d'échange du ρ avec un facteur de forme. Nous ne considérerons pas ici ce type de contribution puisque f_π est supposée être une constante de couplage renormalisée. Un argument similaire est discuté par Rockmore (16) à propos de l'équation de vertex introduite par Liu (17).

Etudions d'abord l'échange de deux π dans la voie t (diagrammes 5-1). Pour calculer le saut correspondant sur la coupure de gauche, il nous faut évaluer la partie absorptive A_t des diagrammes (5-1) pour $t \geq 4$. Ceci peut se faire, en particulier, en écrivant l'unitarité élastique dans la voie t. Suivant (I-14), on obtient, en développant A_t en ondes partielles dans cette voie :

$$A_t^{I'}(t,s) = \left(\frac{f_\pi^2}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{2} \frac{q(t)}{\sqrt{t}} \theta(t-4)$$

(I-42)

$$\sum_{\ell'} \frac{2\ell'+1}{4\pi} \left[4\alpha^{I'\,1} F^{\ell'\,1}(t, m_\rho^2)\right]^2 P_{\ell'}(\cos\theta').$$

Dans cette formule, I' et ℓ' sont, respectivement, le spin isotopique total et le moment angulaire dans la voie t. D'après la statistique, la sommation ne porte que sur les valeurs paires ou impaires de ℓ' selon que I' est pair ou impair. θ', l'angle de diffusion dans la voie t est défini par :

(I-43)
$$\cos\theta' = 1 + \frac{s}{2q^2(t)} .$$

Suivant (I-7), le saut correspondant de $t^{\ell I}(s)$ pour $s < 0$ se calcule à partir de $A_t^{I'}$ à l'aide de la formule [4]

$$\mathrm{Im}\, t^{\ell I}(s) = -\frac{\pi}{q^{2\ell}(s)} \int_{-1}^{1+8/(s-4)} P_\ell(\cos\theta)\, d(\cos\theta)$$

(I-44)
$$\sum_{I'=0,1,2} \alpha^{I I'} A_t^{I'} \left[-2q^2(s)(1-\cos\theta),\ s\right] .$$

Pour calculer Im $t^{\ell I}(s)$ il nous faut donc connaitre $A_t^{I'}(t,s)$ pour

$$s \leq 0 \quad , \quad -1 \leq \cos\theta \leq 1 + \frac{8}{(s-4)} \ .$$

Ceci correspond à

$$t \geq 4 \quad , \quad \cos\theta' \leq -1 \ ;$$

ce qui montre que la convergence de la série (I-42) n'est pas assurée partout. Selon un théorème général sur les développements en série de polynômes de Legendre [18], cette série est convergente pour t fixé dans le plan complexe de cos θ' à l'intérieur de toute ellipse de foyers ± 1 qui ne contient aucune singularité de $A_t^{I'}$.

Ces singularités apparaissent pour les valeurs de s et t qui sont telles que la fonction spectrale double associée aux diagrammes (5-1) soit différente de zéro. Il en résulte que, pour cos θ' réel, (I-42) converge si

$$|\cos\theta'| < \left| 1 + \frac{2m_\rho^2}{q^2(t)} + \frac{m_\rho^4}{2q^4(t)} \right| \ . \tag{I-45}$$

Ceci permet de montrer que le développement en ondes partielles de $A_t^{I'}$ peut être utilisé pour calculer Im $t^{\ell I}$ si s est tel que

$$s > 4\,(3 - 2m_\rho^2) \tag{I-46}$$

Dans ce calcul, m_ρ^2 est considéré comme une inconnue qui doit cependant être supérieure à 4. Cette valeur correspond à $s \geq -20$ tandis que la valeur physique ($m_\rho^2 \simeq 30$) donne $s \geq -228$. On voit donc que,

dans le domaine d'intégration de (I-44), le développement de $A_t^{I'}$ converge sur une assez grande partie de la coupure de gauche. En conséquence nous allons approximer les forces considérées en ne gardant que les L + 1 premiers termes de (I-42) sur toute la coupure de gauche. Ce faisant, on évite les difficultés dûes aux singularités de $A_t^{I'}$. D'un autre côté on peut espérer obtenir malgré tout une bonne approximation puisque les grandes valeurs de s doivent peu contribuer dans les relations de dispersion que l'on utilisera.

Pour résoudre approximativement les équations N/D, il est essentiel de définir une fonction $t_L^{\ell I}(s)$ qui ne possède que la coupure de gauche de $t^{\ell I}(s)$ avec un saut sur cette coupure égal à celui des forces considérées. $t_L^{\ell I}(s)$ jouera ici un rôle analogue à celui de la fonction $g^{\ell I}(s)$ utilisée aux paragraphes (I-B) et (I-C) mais, contrairement à $g^{\ell I}(s)$, elle ne s'obtient pas en calculant simplement des diagrammes. En effet les diagrammes carrés (5) possèdent en plus une coupure de droite $s \geq 4 m_\rho^2$ qu'il faut supprimer.

Pour cela nous introduisons une fonction $g^{(2)\ \ell I}(s)$ définie par la formule (I-48) (v. page suivante), où l'intégration sur cos θ doit être effectuée après avoir exprimé cos θ' et t en fonction de s et de cos θ .

Nous avons obtenu l'expression (I-48), en écrivant une relation de dispersion pour chaque valeur de ℓ' séparément à partir des L + 1 premiers termes de (I-42).

$$g^{(2)\ \ell I}(s) = 2\left(\frac{f_\pi^2}{4\pi}\right)^2 \frac{2}{\pi} \sum_{I'=0,2} {}^{\circ}\alpha^{I\ I'}\left(\alpha^{I'\ 1}\right)^2$$

$$\int_{-1}^{+1} d(\cos\theta) P_\ell(\cos\theta)(t-t_1) \int_4^\infty dt' \frac{q(t')}{\sqrt{t'}} \frac{\left[F^{0\ 1}(t', m_\rho^2)\right]^2}{(t'-t)(t'-t_1)}$$

$$+ \left(\frac{f_\pi^2}{4\pi}\right)^2 \frac{2}{\pi} \sum_{\ell'=1}^{L} (2\ell+1) \sum_{I'} \alpha^{I\ I'}\left(\alpha^{I'\ 1}\right)^2$$

(I-48)

$$\int_{-1}^{+1} d(\cos\theta)\, P_\ell(\cos\theta)\, P_{\ell'}(\cos\theta')\, q^{2\ \ell'}(t)$$

$$\int_4^\infty dt' \frac{q(t')}{\sqrt{t'}} \frac{\left[F^{\ell'\ 1}(t', m_\rho^2)\right]^2}{(t'-t)\ q^{2\ \ell'}(t')} .$$

Pour obtenir des intégrales convergentes, il faut faire au moins une soustraction puisque

$$F^{\ell'\ 1}(t, m_\rho^2) = O(\log t) \qquad \text{pour } t \to +\infty$$

Pour $\ell' \neq 0$ nous avons divisé par $q^{2\ \ell'}(t)$ en utilisant le fait que

$$F^{\ell'\ 1}(t, m_\rho^2) = O\left[(t-4)^{\ell'}\right] \quad \text{quand } t \to 4 .$$

de cette façon, on fait converger les relations de dispersion et on obtient un comportement correct au seuil $t = 4$.

Pour $\ell' = 0$ nous avons effectué la soustraction en un point t_1 arbitraire. En fait $g^{(2)\ell I}$ ne dépend pas de t_1 sauf pour $\ell = 0$.

D'après (I-43), $q^{2\ell'}(t) P_{\ell'}(\cos\theta')$ est un polynôme en s et t. Comme, d'autre part, on ne prend qu'un nombre fini d'ondes partielles dans le second membre de (I-48), les singularités de $g^{(2)\ell I}$ ne proviennent que de l'annulation des dénominateurs (t'-t). Il en résulte que $g^{(2)\ell I}$ est une fonction analytique de s qui ne possède que la coupure de gauche produite par l'échange de deux mésons π ($s \lesssim 0$). Son saut sur cette coupure se calcule en remplaçant $1/(t'-t)$ par $\pi\,\delta(t'-t)$ dans le second membre de (I-48). Il est donc donné par (I-44) et par (I-42) réduit à ses L + 1 premiers termes (Nous avons multiplié par deux pour tenir compte du fait que la voie t et la voie u fournissent la même contribution pour les valeurs de ℓ et I permises par la statistique). La fonction $t_L^{\ell I}(s)$ dont nous avons besoin pour introduire notre approximation des forces dans les équations N/D s'écrit donc, finalement

$$t_L^{\ell I}(s) = g^{\ell I}(s) + g^{(2)\ell I}(s). \qquad \text{(I-49)}$$

Dans cette égalité, le premier terme qui est donné par (I-47) est associé aux forces dues à l'échange du ρ, tandis que le second représente la contribution des forces à deux π que nous ajoutons dans ce chapitre.

I-D-2- Solution approchée des équations N/D.

Nous allons maintenant tenter à nouveau d'engendrer le ρ dans la voie s. Pour cela il nous faut, comme au paragraphe I-B, déterminer t(s) à partir de $t_L(s)$ au moyen de la méthode N/D. (Nous supprimons à nouveau les indices supérieurs ℓ, I lorsque $\ell = 1$, $I = 1$).

Si l'on examine le comportement des différents termes de (I-48), on s'aperçoit que seuls les deux premiers termes ($\ell' = 0$, $\ell' = 1$) ne conduisent pas à des intégrales divergentes dans la méthode N/D. Pour obvier cette difficulté nous allons approximer les forces dûes à l'échange de deux π considérées en ne gardant que les deux premiers termes de (I-48).

Pour comprendre cette approximation, on remarque que, lorsque t tend vers 4 avec s fixé,

$$\left[F^{\ell' 1}(t, m_\rho{}^2)\right]^2 P_\ell (\cos \theta') = O\left[(t-4)^{\ell'}\right].$$

Il s'en suit que les termes pour lesquels ℓ' est grand ne contribuent pas beaucoup aux forces à longue portée produites par l'échange de deux mésons π puisqu'ils sont très petits au début de la coupure en t. Il est donc vraisemblable que ces termes donneraient une contribution véritablement petite dans une théorie plus satisfaisante où aucune divergence n'apparaitrait. En effet, physiquement, ce sont les forces de plus longue portée qui doivent être dominantes.
On peut donc espérer obtenir des résultats valables si l'on élimine les divergences en laissant de côté les termes de $\ell' \geq 2$, comme nous le faisons ici.

Dans cette approximation, $t_L(s)$ s'écrit simplement

$$t_L(s) = \frac{f_\pi^2}{4\pi} \frac{1}{q^2(s)} F^{1\,1}(s, m_\rho^2)$$

$$(I\text{-}51) \quad + \left(\frac{f_\pi^2}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{q^2(s)} \frac{1}{\pi} \int_4^\infty dt' \left\{ \frac{1}{q^2(s)} \frac{q(t')}{\sqrt{t'}} F^{1\,0}(s,t') \right.$$

$$\left. \left[F^{0\,1}(t', m_\rho^2)\right]^2 + \frac{3}{2} \frac{1}{q(t')\sqrt{t'}} F^{1\,1}(s,t') \left[F^{1\,1}(t', m_\rho^2)\right]^2 \right\}.$$

Dans cette égalité, l'intégrale sur $\cos\theta$ du terme $\ell' = 1$ a été calculée à l'aide de (I-15). Pour le terme $\ell' = 0$, nous avons introduit la fonction

$$F^{\ell\,0}(x,y) = \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} \frac{P_\ell(v)}{b-v} \, dv$$

où b est donné par (I-15-b). Cette fonction est associée à l'échange d'une particule scalaire de masse y projeté sur l'onde partielle ℓ.

Il est bien clair que l'on ne peut éliminer les divergences par la méthode que nous employons que parce que les parties absorptives des diagrammes de la figure (5) sont finies alors que ces diagrammes eux-mêmes sont divergents.

Nous allons maintenant déduire $t(s)$ de $t_L(s)$ à l'aide de la méthode N/D. Le système d'équations est analogue à (I-24) et (I-21) :

$$N(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{0} ds' \frac{\mathrm{Im}\, t_L(s')}{(s'-s)} D(s')$$

$$D(s) = 1 - \frac{s-s_0}{\pi} \int_4^\infty ds' \frac{q^3(s')}{\sqrt{s'}} \frac{N(s')}{(s'-s)(s'-s_0)}$$

Puisque $t_L(s)$ ne possède que la coupure de gauche de t(s) on n'obtient, comme en (I-B), en éliminant D(s) entre ces deux équations :

$$N(s) = t_L(s) + \frac{1}{\pi} \int_4^\infty ds' \; \frac{q^3(s')}{\sqrt{s'}} \left[(s'-s_o)\, t_L(s') - (s-s_o) t_L(s)\right] \frac{N(s')}{(s'-s)(s'-s_o)}$$

D'après (I-51), $t_L(s)$ est un polynôme en f_π. On obtiendra donc un développement de N en série entière de la constante de couplage en résolvant l'équation intégrale précédente par approximations successives. Etant donné que nous considérons les forces jusqu'au quatrième ordre nous approximerons N par les termes du second et du quatrième degré ainsi obtenus, de façon à déterminer N également au quatrième ordre. Ceci nous amène, contrairement à Zachariasen et Zemach [7], à garder une partie de la deuxième itération. Il est facile de voir que, dans cette approximation :

$$(I\text{-}52)\quad N(s) = t_L(s) + \left(\frac{f_\pi^2}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\pi} \int_4^\infty \frac{q(s')}{\sqrt{s'}} \left[\frac{(s'-s_o)}{q^2(s')} F^{1\,1}(s', m_\rho^2) - \frac{(s-s_o)}{q^2(s)} F^{1\,1}(s, m_\rho^2)\right] \frac{F^{1\,1}(s', m_\rho^2)}{(s'-s)(s'-s_o)}\, ds'$$

D(s) sera ensuite déduit de N(s) comme dans l'approximation de Zachariasen et Zemach de façon à obtenir une approximation unitaire de t(s).

Il est intéressant d'examiner la question de la symétrie de croisement pour avoir une idée de la validité des approximations étudiées.

Nous remarquerons tout d'abord que l'amplitude t(s) calculée à partir de (I-52) peut être formellement développée en puissances de f_π suivant la formule

$$t(s) = t_L(s) + \left(\frac{f_\pi^2}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\pi} \int_4^\infty ds' \, \frac{q(s')}{\sqrt{s'}} \, \frac{\left[F^{1\,1}(s', m_\rho^2)\right]^2}{(s'-s)\, q^2(s')} + O(f_\pi^6) ;$$

sur la coupure physique cela donne

$$\text{(I-53)} \quad \text{Im } t(s) = \left(\frac{f_\pi^2}{4\pi}\right)^2 \frac{q^{-1}(s)}{\sqrt{s}} \left[F^{1\,1}(s, m_\rho^2)\right]^2 + O(f_\pi^6) .$$

D'un autre côté, on peut déterminer également $t^{oo}(s)$ et $t^{o2}(s)$ à partir de leurs sauts sur la coupure de gauche donnés par $t_L^{oo}(s)$ et $t_L^{o2}(s)$. On obtient, si on néglige les forces de portée nulle,

$$\text{(I-54)} \quad \begin{aligned} \text{Im } t^{oo} &= 4\left(f_\pi^2/4\pi\right)^2 \frac{q^{-1}(s)}{\sqrt{s}} \left[F^{0\,1}(s, m_\rho^2)\right]^2 + O(f_\pi^6) , \\ \text{Im } t^{o2} &= \left(f_\pi^2/4\pi\right)^2 \frac{q^{-1}(s)}{\sqrt{s}} \left[F^{0\,1}(s, m_\rho^2)\right]^2 + O(f_\pi^6) . \end{aligned}$$

Si on ne considère que les ondes S et P dans la voie s, on peut déduire de (I-53) et (I-54) les parties absorptives A_s^I dans cette voie :

$$A_s^0 = \frac{q^2}{4\pi} \text{ Im } t^{oo}(s) , \quad A_s^2 = \frac{q^2}{4\pi} \text{ Im } t^{o2}(s) ,$$

$$A_s^1 = \frac{3}{4\pi} q^2 \cos \cdot \text{Im } t(s) .$$

Il est facile de vérifier que ces parties absorptives sont identiques à celles que l'on déduit de $A_t^{I'}$ par la symétrie de croisement, c'est-à-dire que :

$$A_s^I(s,t) = A_t^I(t,s)$$

où A_t^I est donné par les deux premiers termes de (I-42).

La symétrie de croisement est donc vérifiée au quatrième ordre en f_π entre les coupures dues à deux π intermédiaires dans les voies s, t et u si l'on ne considère simultanément que les ondes S et P dans ces trois voies. Ce résultat est analogue à celui de l'approximation de Chew et Mandelstam [3].

Dans l'approximation de Zachariasen et Zemach [7], les forces sont du deuxième ordre et correspondent à des pôles dans les voies t et u alors même qu'il existe une coupure en s due à l'état de deux π intermédiaires dont les sauts sont aussi donnés par (I-53) et (I-54). Il apparait donc que, dans notre approximation, l'amplitude satisfait mieux la symétrie de croisement. Dans les deux modèles on impose la symétrie de croisement entre les termes de pôles dus au ρ dans les trois voies lorsque l'on écrit les équations d'autoconsistance. Dans le cas où l'on ajoute les forces dues à l'échange de deux π que nous introduisons, on obtient en plus une symétrie approximative entre les coupures à deux π.

I-D-3 - Résultats numériques

Pour résumer les résultats précédents nous écrivons les expressions complètes de N et de D sous la forme suivante qui sera commode dans la discussion des résultats numériques.

$$N(s,m_\rho^2) = \frac{f_\pi^2}{4\pi} N_2 + \left(\frac{f_\pi^2}{4\pi}\right)^2 N_4$$

(I-55)

$$D(s,m_\rho^2) = 1 - \frac{f_\pi^2}{4\pi} R_2 - \left(\frac{f_\pi^2}{4\pi}\right)^2 R_4 - i\frac{q^3(s)}{\sqrt{s}} N(s,m_\rho^2)$$

où

$$N_2 = \frac{1}{q^2(s)} F^{1\,1}(s,m_\rho^2)$$

$$N_4 = \frac{1}{\pi q^2(s)} \int_4^\infty dt' \left\{ \frac{1}{q^2(s)} \frac{q(t')}{\sqrt{t'}} F^{1\,0}(s,t') \left[F^{0\,1}(t',m_\rho^2)\right]^2 \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2} \frac{1}{q(t')\sqrt{t'}} F^{1\,1}(s,t') \left[F^{1\,1}(t',m_\rho^2)\right]^2 \right\}$$

(I-56)

$$+ \frac{1}{\pi} \int_4^\infty ds' \frac{q(s')}{\sqrt{s'}} \left\{ \frac{(s'-s_o)}{q^2(s')} F^{1\,1}(s',m_\rho^2) - \right.$$

$$\left. - \frac{(s-s_o)}{q^2(s)} F^{1\,1}(s,m_\rho^2) \right\} \frac{F^{1\,1}(s',m_\rho^2)}{(s'-s)(s'-s_o)}$$

et

(I-57)

$$R_i = \frac{s-s_o}{\pi} P \int_4^\infty ds' \frac{q^3(s')}{\sqrt{s'}} \frac{N_i(s',m_\rho^2)}{(s'-s)(s'-s_o)} \quad (i = 2,4) .$$

Dans (I-56), R_2 est le même que la fonction G introduite par la formule (I-32).

Tout d'abord, il est important de remarquer que les forces dues à l'échange de deux π que nous considérons sont attractives pour $\ell = 1$, $I = 1$. En effet, $g^{(2)\,11}(s)$ est donné par une intégrale positive comme on peut le voir sur la formule (I-51) en se rappelant que toutes les fonctions F qui interviennent sont supérieures à zéro. Les forces que nous ajoutons ont donc le même signe que les forces dues à l'échange du ρ. Elles vont, par conséquent, faciliter la génération du ρ Ce résultat est lié aux propriétés de la matrice de croisement du spin isotopique. En effet, le signe des forces à deux π est fixé par le signe des expressions du type :

$$\sum_{I'} \alpha^{I\,I'} \left(\alpha^{I'\,1}\right)^2$$

qui apparaissent dans la formule (I-48). Pour $\ell' = 1$, le terme de spin isotopique est $(\alpha^{1\,1})^3$ qui est évidemment du signe de $\alpha^{1\,1}$, donc positif. Pour $\ell' = 0$, on peut avoir $I' = 0$ ou $I' = 2$. D'après (I-6) $\alpha^{1\,0}$ est positif et $\alpha^{1\,2}$ négatif ; par conséquent, $I' = 0$ donne attraction et $I' = 2$ donne répulsion. La contribution du terme correspondant à $\ell' = 0$ est malgré tout attractive au total car :

$$\alpha^{10}(\alpha^{01})^2 > -\alpha^{12}(\alpha^{21})^2 ,$$

ce qui montre que les propriétés de la matrice $\alpha^{I\,I'}$ sont telles que l'attraction due à $I' = 0$ l'emporte sur la répulsion produite par le terme $I' = 2$.

Ce résultat qualitatif est très important car il permet d'engendrer le ρ de façon autoconsistante lorsque l'on tient compte des forces dues à l'échange de deux mésons π.

A partir des expressions (I-55) de N et de D on écrit les équations d'autoconsistance de la même façon qu'au paragraphe (I-B) :

a) Re D doit s'annuler pour $s = m_\rho^2$. Il s'en suit que :

$$\left(\frac{f_\pi^2}{4\pi}\right)^2 R_4(m_\rho^2, m_\rho^2) + \frac{f_\pi^2}{4\pi} R_2(m_\rho^2, m_\rho^2) - 1 = 0 \qquad \text{(I-58-a)}$$

b) La largeur de la résonance ainsi obtenue doit être égale à la largeur physique (I-30) du ρ.

Ceci conduit à l'équation :

$$\frac{3}{2} q^2(m_\rho^2) \left[\left(\frac{f_\pi^2}{4\pi}\right)^2 R'_4 + \frac{f_\pi^2}{4\pi} R'_2\right] - \frac{f_\pi^2}{4\pi} N_4(m_\rho^2, m_\rho^2) - N_2(m_\rho^2, m_\rho^2) = 0 \qquad \text{(I-58-b)}$$

où $$R'_i = \frac{\partial}{\partial s}\left[R_i(s, m_\rho^2)\right]_{s=m_\rho^2} \qquad (i = 2, 4) .$$

Ces deux équations remplacent le système d'équations (I-31-a), (I-31-b) dans le calcul des paramètres du ρ.

Nous fixerons le point de soustraction s_o au même endroit que Zachariasen et Zemach, c'est-à-dire au début de la coupure de gauche due au ρ en posant :

$$s_o = 4 - m_\rho^2 .$$

Le système des équations d'autoconsistance a été étudié, comme au paragraphe (I-B), en calculant numériquement les coefficients N_i, R_i et R'_i pour plusieurs valeurs de m_ρ^2. Les courbes ainsi obtenues

sont dessinées sur la figure (6). Nous y avons également reproduit les courbes correspondantes de l'approximation de Zachariasen et Zemach qui étaient déjà indiquées sur la figure (3). Ainsi, la courbe (1-a) correspond à l'équation (I-31-a) [courbe(1-1) de la figure (3)] et la courbe (1-b) à l'équation (I-31-b) [courbe (2) de la figure (3)].

Pour une valeur donnée de m_ρ^2, les conditions (I-58-a) et (I-58-b) conduisent en réalité à des équations du second degré en $\frac{f_\pi^2}{4\pi}$. Cependant, comme nous l'avons déjà remarqué, R_4 est positif car les forces dues à l'échange de deux π que nous considérons sont attractives, il s'en suit que les deux équations considérées ont automatiquement chacune deux solutions réelles et de signes opposés. Il apparait donc que notre modèle ne contient aucune ambiguité puisque l'on ne doit considérer que les solutions physiques, c'est-à-dire les racines positives de (I-58-a) et (I-58-b). Ceci conduit, respectivement aux courbes (2-a) et (2-b) de la figure (6).

Tout d'abord, on peut constater, en examinant la figure (6), qu'il existe une certaine stabilité des équations d'autoconsistance par rapport à l'addition des forces dues à l'échange de deux π. En effet, les courbes (1-a) et (1-b) ne sont pas très différentes des courbes (2-a) et (2-b).

Il est intéressant de comparer les courbes (1-a) et (1-b) qui découlent toutes deux de la condition $Re\ D = 0$. Comme nous l'avons indiqué au paragraphe (I-B), le fait que la courbe (1-a) soit bien au-dessus de la valeur physique de $\frac{f_\pi^2}{4\pi}$ montre que les forces dues au ρ ne sont pas, en réalité, assez fortes pour engendrer le ρ. Au contraire, la courbe (1-b) est pratiquement confondue avec la droite

$$\frac{f_\pi^2}{4\pi} = 2$$

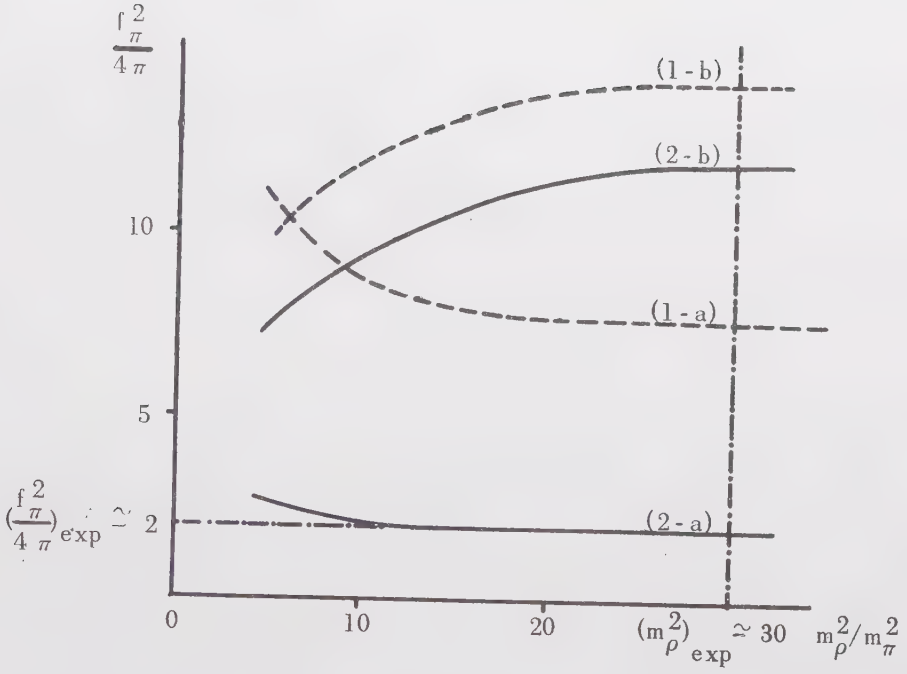


figure (6)

Les relations d'autoconsistantes déduites de :

1°) Les équations de Zachariasen et Zemach : (1-a) et (1-b)

2°) Notre modèle : (2-a) et (2-b)

qui correspond à la valeur physique de cette constante de couplage. Par conséquent, en ajoutant les termes d'échange de deux π on obtient des forces qui sont réellement capables d'engendrer le ρ. En effet, le déphasage calculé à partir de (I-55) en utilisant la valeur physique de f_π passe réellement par $\frac{\pi}{2}$.

Si maintenant on compare les courbes (2-a) et (2-b) on voit que les résultats déduits de l'identification des largeurs sont moins sensibles à l'approximation des forces puisque les courbes (2-a) et (2-b) sont beaucoup plus proches l'une de l'autre que les courbes (1-a) et (1-b). Ceci fait, malheureusement, que la solution autoconsistante disparait lorsque les forces dues à l'échange de deux π sont ajoutées.

Considérons, pour un moment, l'amplitude t(s) calculée à partir de (I-55), (I-56) et (I-57) en donnant à $\frac{f_\pi^2}{4\pi}$ sa valeur physique. On obtient ainsi une onde partielle qui possède bien un pic aux alentours de la masse du ρ où Re D s'annule. Cependant, la largeur de ce pic, calculée par (I-29), est beaucoup plus grande que la largeur physique du ρ donnée par (I-30) ; c'est pourquoi il n'y a pas de solution autoconsistante. D'un autre côté, comme Capps [19] l'a souligné, on diminue automatiquement la largeur d'une résonance en ajoutant des voies où sa masse lui interdit de se désintégrer. Dans notre cas, nous voulons précisément diminuer la largeur de la résonance qui apparait dans la voie s. Il semble donc probable que l'on obtiendra, de nouveau, une solution autoconsistante à condition d'améliorer également l'approximation de l'unitarité. Le fait que les forces considérées apparaissent comme physiquement capables d'engendrer le ρ fait espérer que cette solution sera assez satisfaisante.

CHAPITRE II

GENERATION DU ρ DANS L'APPROXIMATION A DEUX VOIES

CHAPITRE II

GENERATION DU ρ DANS L'APPROXIMATION A DEUX VOIES

II - A - INTRODUCTION

Les résultats obtenus en ajoutant les forces dues à l'échange de deux π ont montré qu'il faut introduire des effets d'inélasticité pour engendrer le ρ. Pour cela, comme Zachariasen et Zemach l'on déjà fait en ne tenant compte que des forces dues au ρ [7], nous allons considérer un problème à deux voies couplées. Ce type de problème peut être traité de façon assez simple par une méthode N/D matricielle proposée par Bjorken [20].

Etant donnés les nombres quantiques du ρ, ($\ell = 1$, $I = 1$), le premier état à deux particules qui contribue dans l'unitarité après π π est π ω dont la masse est $m_\pi + m_\omega \simeq 920$ MeV. L'état $K\bar{K}$ qui vient après est très proche puisque $2\, m_K \simeq 990$ MeV. Comme nous ne saurons pas, pour de simples raisons de complication, traiter le problème à trois voies couplées π π, $K\bar{K}$, π ω, en tenant compte des termes à deux particules échangées, il nous faut choisir entre π ω et $K\bar{K}$. Zachariasen et Zemach [7] ont considéré le problème à deux voies π π - π ω. Nous serons amenés, au contraire, à étudier le problème π π - $K\bar{K}$ pour les raisons suivantes :

Tout d'abord le ω ayant un spin 1 , la voie $\pi\ \omega$ est beaucoup plus difficile à considérer que la voie $K\bar{K}$. Dans l'étude de Zachariasen et Zemach [7], les singularités cinématiques dues au spin de cette particule ne sont pas correctement éliminées. Un traitement exact a été donné par Fulco, Show et Wong [34] qui ont simultanément considéré le problème à trois voies $\pi\ \pi - K\bar{K} - \pi\ \omega$ dans l'approximation à une particule échangée. En examinant les équations utilisées par ces auteurs, on voit que le spin du ω fait fortement diverger certaines intégrales, ce qui rend les résultats douteux. En particulier, ils déduisent de leurs calculs que la voie $\pi\ \omega$ est un peu plus importante que la voie $K\bar{K}$. A notre avis, ce résultat est dû au fait que l'état $\pi\ \omega$ comprend une particule de spin 1 alors que l'état $K\bar{K}$ ne contient que des particules de spin 0, la divergence des intégrales favorisant automatiquement la voie $\pi\ \omega$ au détriment de $K\bar{K}$.

D'un autre côté, Capps [33] a montré que si l'on engendre de façon autoconsistante les mésons vectoriels (ρ , ω, K^*) comme des pôles dans les amplitudes de diffusion des mésons pseudo-scalaires, les constantes de couplage calculées par l'approximation de Zachariasen et Zemach sont exactement dans le rapport prédit par SU_3, à condition de négliger les différences de masse à l'intérieur d'un même multiplet. Dans l'étude de Capps, en particulier, le ρ est engendré dans le problème à deux voies $\pi\ \pi - K\bar{K}$. Etant donné le succès expérimental de SU_3 cassé, ceci conduit à penser que, dans un calcul où l'on tient compte des différences de masse, il faut aussi considérer le problème à deux voies $\pi\ \pi - K\bar{K}$.

Nous allons par conséquent considérer les réactions :

$$\pi(\underline{p}_1) + \pi(\underline{p}_2) \rightarrow \pi(-\underline{p}_3) + \pi(-\underline{p}_4)$$

$$\pi(\underline{p}_1) + \pi(\underline{p}_2) \rightarrow K(-\underline{p}_3) + \bar{K}(-\underline{p}_4)$$

$$K(\underline{p}_1) + \bar{K}(\underline{p}_2) \rightarrow \pi(-\underline{p}_3) + \pi(-\underline{p}_4)$$

$$K(\underline{p}_1) + \bar{K}(\underline{p}_2) \rightarrow K(-\underline{p}_3) + \bar{K}(-\underline{p}_4)$$

où p_i ($i = 1, \ldots 4$) désigne les impulsion-énergies des particules qui diffusent. Les invariants de Mandelstam sont les mêmes qu'au chapitre I :

$$s = -(\underline{p}_1 + \underline{p}_2)^2 \quad , \quad t = -(\underline{p}_1 + \underline{p}_3)^2 \quad , \quad u = -(\underline{p}_1 + \underline{p}_4)^2 .$$

Les "matrices T" qui décrivent ces réactions sont définies par (nous ne considérons que les états de spin isotopique total $I = 1$ dans la voie s) :

$$\langle -\underline{p}_3, -\underline{p}_4 | S_{ij} | \underline{p}_1, \underline{p}_2 \rangle =$$

$$\delta_{ij} \langle -\underline{p}_3, -\underline{p}_4 | \underline{p}_1, \underline{p}_2 \rangle + \frac{2i\, T_{ij}}{\sqrt{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4}}\, \delta_4 (\underline{p}_1 + \underline{p}_2 + \underline{p}_3 + \underline{p}_4)$$

Dans cette égalité, i et j varient de 1 à 2, et nous associons l'indice 1 à la voie $\pi\,\pi$ et l'indice 2 à la voie $K\,\bar{K}$.

Les ondes partielles $t_{ij}(s)$ correspondant au spin $\ell = 1$ du dans la voie s seront calculées à partir de T_{ij} suivant les formules :

$$(II\text{-}1) \qquad t_{ij}(s) = \frac{2\pi}{q_i(s)\, q_j(s)} \frac{1}{\beta_{ij}} \int_{-1}^{+1} \cos\theta \, d(\cos\theta)\, T_{ij}(s, \cos\theta) .$$

où q_k $(k = 1,2)$ désigne l'impulsion dans le centre de masse de la voie k.

$$(II\text{-}2) \qquad q_1(s) = \frac{1}{2}\sqrt{s - 4} \quad , \quad q_2(s) = \frac{1}{2}\sqrt{s - 4\, m_K^2} .$$

Les coefficients β_{ij} sont destinés à tenir compte de l'identité des mésons π :

$$\beta_{11} = 2 \quad , \quad \beta_{12} = \beta_{21} = \sqrt{2} \quad , \quad \beta_{22} = 1$$

Ainsi, l'unitarité s'écrit en ne tenant compte que des états intermédiaires $\pi\,\pi$ et $K\bar{K}$

$$(II\text{-}3) \qquad \mathrm{Im}\, t_{ij}(s) = \sum_{k=1,2} \theta(s - s_k) \frac{q_k^3(s)}{\sqrt{s}} t_{ik}\, t_{kj}^*$$

où s_k désigne le seuil de la voie k.

$$(II\text{-}4) \qquad s_1 = 4 \quad , \quad s_2 = 4\, m_K^2 = 53 .$$

Il est important de remarquer que l'invariance par renversement du temps impose la condition

$$(II\text{-}5) \qquad t_{12}(s) = t_{21}(s) .$$

En réalité, cette égalité ne sera qu'approximativement satisfaite par les expressions approchées de t_{ij} que nous obtiendrons (cette question sera discutée à nouveau plus loin).

Les ondes partielles t_{12} et t_{22} possèdent en fonction de s des propriétés analogues à celles de t_{11} que nous avons rappelées au chapitre I.

Pour la réaction $\pi\pi \to K\bar{K}$, les deux voies croisées sont identiques et décrivent la réaction $\pi + K \to \pi + K$. $T_{12}(s, t, u)$ possède donc les deux coupures $t \geq (m_K + 1)^2$ et $u \geq (m_K + 1)^2$. L'échange d'un état de masse $\sqrt{t'}$ dans la voie t produit une coupure de l'onde partielle $t_{12}(s)$ pour les valeurs de s qui sont telles que :

$$(t' - t) = t' + \frac{s}{2} - m_K^2 - 1 - 2 q_1 q_2 \cos\theta = 0$$

pour $-1 \leq \cos\theta \leq 1$.

Ces valeurs sont donc solutions de l'équation

$$\frac{s^2}{4}(1 - x^2) + s\left[t' - (m_K^2 + 1)(1 - x^2)\right] + (t' - m_K^2 - 1)^2 - 4x^2 m_K^2 \quad 0$$

avec $0 \leq x \leq 1$, ce qui conduit à :

$$(II\text{-}6) \qquad -\infty \leq s \leq \left\{4 m_K^2 - (t' - m_K^2 + 1)^2\right\} \frac{1}{t'} .$$

En faisant varier t' de $(m_K + 1)^2$ à l'infini, on obtient la coupure de gauche de t_{12} :

$$(II\text{-}7) \qquad -\infty \leq s \leq 0 .$$

Les deux voies croisées de la réaction $K\bar{K} \to K\bar{K}$ sont $K + K \to K + K$ (voie u) et, de nouveau, $K\bar{K} \to K\bar{K}$ (voie t). Les coupures correspondantes de T_{22} apparaissent respectivement pour $t \geq 4$ et $u \geq 4 m_K^2$. Nous ne considérerons pas les forces dues à cette dernière coupure car elles ont une portée beaucoup plus faible que les autres forces dont nous allons tenir compte.

En raisonnant comme précédemment, on montre que l'échange d'un état de masse $\sqrt{t'}$ dans la voie t produit une coupure de $t_{22}(s)$ qui est donnée par :

$$(II\text{-}8) \qquad -\infty \leq s \leq 4 m_K^2 - t' .$$

La coupure de gauche de t_{22} s'obtient en faisant varier t' de 4 à $+\infty$:

$$(II\text{-}9) \qquad -\infty \leq s \leq 4 (m_K^2 - 1) .$$

Les coupures de droite de t_{12} et t_{22} s'étendent de s_1 à l'infini, alors que le seuil physique des réactions $\pi\pi \to K\bar{K}$ et $K\bar{K} \to K\bar{K}$ est s_2. En particulier, pour t_{22} les coupures de gauche et de droite se chevauchent. Cela amènera des difficultés sur lesquelles nous reviendrons.

Le plan de ce chapitre sera analogue à celui du chapitre I. Dans une première partie (paragraphe II-B), nous approximerons les forces par les termes d'échange d'une particule. Ceux-ci se révèleront insuffisants pour engendrer le ρ et dans une deuxième partie (II-C), nous ajouterons les forces produites par l'échange de $\pi - \pi$ et de $K - \pi$. Cette dernière approximation permettra, contrairement au chapitre I, d'obtenir une solution autoconsistante qui sera en meilleur accord avec l'expérience que celle du paragraphe (II-B).

II - B - GENERATION DU ρ PAR LES FORCES DUES A L'ECHANGE D'UNE SEULE PARTICULE

II-B-1 - Forces produites par l'échange d'une particule

Dans la réaction $\pi\pi \to K\bar{K}$, on peut avoir échange du K^* dans les voies t et u. Pour la diffusion $K\bar{K} \to K\bar{K}$, le ρ, le ω et le φ apparaissent comme états intermédiaires dans la voie t[1]. L'introduction des forces dues à l'échange du ω et du φ demande quelques précautions à cause du mélange ω - φ qui semble se produire expérimentalement[21].

En effet, en théorie des groupes, on répartit les mésons vectoriels K^*, ρ, ω et φ en un octet et un singulet. Le K^* et le ρ trouvent leur place naturellement dans l'octet. La formule de masse de Gell-Mann et Okubo[22] prédit alors que le membre iso-scalaire de cet octet doit avoir une masse m telle que :

$$m_{K^*}^2 = \frac{3}{4} m^2 + \frac{1}{4} m_\rho^2 , \qquad \text{(II-10)}$$

ce qui conduit à $m = 930$ MeV. Le ω et le φ ont bien les nombres quantiques nécessaires pour faire partie de l'octet ($I = 0$, $J^P = 0^-$), mais ni l'un ni l'autre n'a une masse égale à m ($m_\phi = 1019$ MeV, $m_\omega = 782$ MeV). Pour satisfaire la relation (II-10) on est amené à supposer que le ω et le φ se mélangent de sorte que le membre de l'octet est une autre particule Y dont la masse m_Y est bien égale à m et qui est une combinaison linéaire du ω et du φ. Le singulet Z est formé de la combinaison linéaire qui est perpendiculaire à Y. Dans notre problème, il est important de considérer Y et Z et non ω et φ. En effet, seul le membre de l'octet Y est couplé à $K\bar{K}$. Ceci conduit,

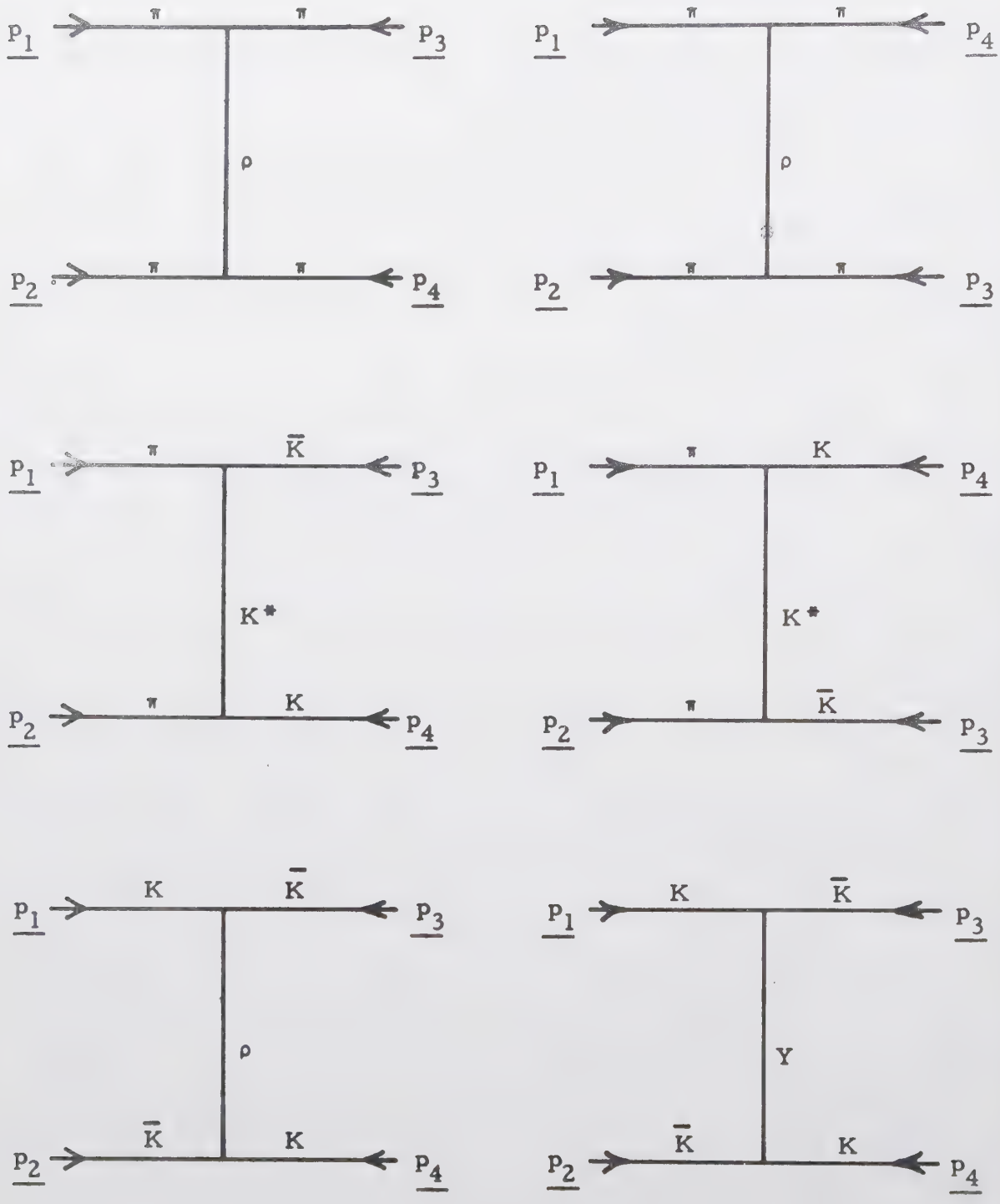


figure (7)

Les diagrammes d'échange d'une particule

par conséquent, à considérer l'échange du ρ et du Y dans $K\bar{K} \to K\bar{K}$ (*).

Les diagrammes d'échange d'une particule sont dessinés sur la figure (7). Les constantes de couplage qui y figurent seront définies par le Hamiltonien :

$$\text{(II-11)} \qquad \mathcal{H} = \rho_\mu^{\vec{}} \Big\{ f_\pi \vec{\pi} \times \partial_\mu \vec{\pi} + i f_K \Big[(\partial_\mu K^+) \frac{\vec{\tau}}{2} K - K^+ \frac{\vec{\tau}}{2} \partial_\mu K \Big] + Y_{K^*} \Big[i K^{*+}_\mu \frac{\vec{\tau}}{2} (K \partial_\mu \vec{\pi} - \vec{\pi} \partial_\mu K) + \text{h.c.} \Big]$$

$$+ i f_Y Y_\mu \Big[(\partial_\mu K^+) K - K^+ \partial_\mu K \Big]$$

(h. c. signifie hermétique conjugué)

On peut alors calculer les diagrammes de la figure (7). Leur projection sur l'onde partielle ℓ, I s'écrit, si l'on considère les échanges de particules dans les voies t :

(*) Récemment, quelques évidences d'une résonance K K ont cependant été rapportées [24]. Nous ne tiendrons pas compte ici de l'échange de cette particule car elle est loin d'être complètement établie. De toute façon, sa masse étant assez grande, la force correspondante aurait une portée beaucoup plus faible que les autres forces qui jouent ici.

$$B_{11}^{\ell I}(s) = \frac{f_\pi^2}{4\pi}\ 2\,\alpha^{I\,1}\ F_{11}^{\ell\,1}(s, m_\rho^2)\ ,$$

$$B_{12}^{\ell I}(s) = \frac{\gamma_{K^*}^2}{4\pi}\ 3\,C_{0\ 1}^{I\,1/2}\ F_{12}^{\ell\ 1}(s,\ m_{K^*}^2)\ ,$$

(II-12)

$$B_{22}^{\rho\ \ell I}(s) = \frac{f_K^2}{4\pi}\ \frac{1}{2}\ K^{I\,0}\ F_{22}^{\ell\ 1}(s,\ m_\rho^2)\ ,$$

$$B_{22}^{Y\ \ell I}(s) = \frac{f_Y^2}{4\pi}\ 2\ K^{I\,1}\ F_{22}^{\ell\ 1}(s,\ m_Y^2)\ ,$$

(B_{11} a évidemment déjà été calculé au chapitre I, v. formule I-14).

L'indice supérieur ρ ou Y de B_{22} indique qu'elle est la particule échangée ; $\alpha^{I\,I'}$ représente la matrice de croisement du spin isotopique indiquée en (I-6) pour la diffusion π - π ; $C^{I\,I'}$ désigne les matrices de croisement du problème π - K, les indices inférieurs étant égaux aux étrangetés des voies considérées ; ainsi $C_{o\ 1}^{I\,I'}$ exprime le croisement de la voie t vers la voie s :

(II-13)
$$C_{0\ 1}^{I\,I'} = \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} & -2\sqrt{2/3} \\ 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Enfin nous appelons $K^{I\,I'}$, la matrice de croisement de la voie t vers la voie s dans $K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}$

(II-14) $$K^{II'} = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} .$$

Nous introduirons par la suite les forces dûes à l'échange de deux particules de la même façon qu'au chapitre I. Nous aurons donc besoin des fonctions $F^{\ell\ell'}(x, y)$ qui apparaissent en (II-12) pour les valeurs $\ell = 0, 1$ et $\ell' = 0, 1$. On peut les écrire sous la forme

(II-15)
$$F_{ij}^{\ell\, 1}(x, y) = \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} P_\ell(v)\, dv \; \frac{a_{ij}+v}{b_{ij}-v} ,$$

$$F_{ij}^{\ell\, 0}(x, y) = \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} P_\ell(v)\, dv \; \frac{1}{b_{ij}-v} ,$$

où $$b_{11} = 1 + \frac{y}{2q_1^2(x)} , \qquad a_{11} = 1 + \frac{x}{2q_1^2(x)} ,$$

(II-16)
$$b_{12} = \frac{1}{2q_1(x)q_2(x)} \left\{ \frac{x}{2} - m_K^2 - 1 + y \right\} ,$$

$$a_{12} = \frac{1}{2q_1(x)q_2(x)} \left\{ \frac{3x}{2} - m_K^2 - 1 + \frac{(m_K^2-1)^2}{y} \right\} ,$$

$$b_{22} = 1 + \frac{y}{2q_2^2(x)} , \qquad a_{22} + 1 + \frac{x}{2q_2^2(x)} .$$

Puisque nous ne considérons, dans ce paragraphe, que les forces produites par l'échange d'une seule particule, nous approximerons les coupures de gauche de t_{ij} par celles des diagrammes (7). Ces coupures se déduisent aisément des résultats précédents. En effet, comme indiqué au paragraphe I-B, l'échange du ρ produit dans t_{11} une coupure pour

$$s \leq 4 - m_\rho^2. \tag{II-18}$$

D'autre part, la coupure de t_{12} dûe à l'échange du K^* commence, d'après (II-6) à

$$s = \left\{ 4m_K^2 - (m_{K^*}^2 - m_K^2 + 1)^2 \right\} \frac{1}{m_{K^*}^2} \simeq -16 \tag{II-19}$$

Enfin, pour t_{22}, la coupure dûe à l'échange du Y s'étend, d'après (II-8) à partir de :

$$s = 4m_K^2 - m_Y^2 \simeq 8 \tag{II-20}$$

et celle qui est produite par le ρ à partir de

$$s = 4m_K^2 - m_\rho^2. \tag{II-21}$$

En conclusion, nous introduisons, compte tenu de (II-1) les fonctions

$$g_{11}^{(1)}(s) = \frac{f_\pi^2}{4\pi} \frac{1}{q_1^2(s)} F_{11}^{1\,1}(s, m_\rho^2) ,$$

$$g_{12}^{(1)}(s) = g_{21}^{(1)}(s) = \frac{\gamma_{K^*}^2}{4\pi} \frac{2\sqrt{2}}{q_1(s)q_2(s)} F_{12}^{1\,1}(s, m_{K^*}^2)$$

(II-22)

$$g_{22}^{(1)}(s) = \frac{f_Y^2}{4\pi} \frac{1}{q_2^2(s)} F_{22}^{1\,1}(s, m_Y^2)$$

$$- \frac{f_K^2}{4\pi} \frac{1}{q_2^2(s)} \frac{1}{4} F_{22}^{1\,1}(s, m_\rho^2)$$

Nous chercherons à déterminer t_{ij} en supposant que son saut sur les coupures de gauche est donné par :

(II-23) $$\text{Im } t_{ij}(s) = \text{Im } g_{ij}^{(1)}(s)$$

Les formules (II-22) montrent finalement que l'échange du K^* est attractif dans $\pi\pi \to K\bar{K}$ et que pour $K\bar{K} \to K\bar{K}$ la contribution du ρ est répulsive tandis que celle du Y est attractive.

II-B-2 - Equations N/D.

La méthode N/D à deux voies consiste à poser

(II-24) $$t = N D^{-1}$$

où les matrices 2 x 2 D_{ij} et N_{ij} sont des fonctions analytiques de s

qui sont choisies telles que D_{ij} ne possède que la coupure de droite $s \geq s_i$ [20]. Les équations N/D s'obtiennent, comme dans l'approximation à une voie, en écrivant des relations de dispersion pour N et D en fonction de s.

a) Pour $s \geq s_i$, on a, d'après (II-3) :

$$\mathrm{Im}(t^{-1})_{ij} = \theta\,(s-s_i)\,\frac{q_i^{\,3}}{\sqrt{s}}\,\delta_{ij},$$

d'où, d'après (II-24)

$$\mathrm{Im}\,D_{ij} = -\,\theta\,(s-s_i)\,\frac{q_i^{\,3}(s)}{\sqrt{s}}\,N_{ij}. \tag{II-25}$$

D satisfait donc la relation de dispersion

$$D_{ij} = \delta_{ij} - \frac{s-s_o}{\pi}\int_{s_i}^{\infty}\frac{q_i^{\,3}(s')}{\sqrt{s'}}\,\frac{N_{ij}(s')ds'}{(s'-s)(s'-s_o)} \tag{II-26}$$

Pour écrire cette relation, nous avons normalisé D_{ij} à δ_{ij} au point de soustraction s_o. Cela est toujours possible si s_o ne se trouve pas sur les coupures $s \geq s_i$ puisque seul ND^{-1} a un sens physique.

b) de l'égalité (II-24), on déduit que, sur les coupures de gauche,

$$\mathrm{Im}\,N_{ij} = \sum_{k=1,2}\mathrm{Im}\,t_{ik}\,D_{kj}$$

d'où, d'après (II-23)

$$\text{(II-27)} \qquad \operatorname{Im} N_{ij} = \sum_{k=1,2} \operatorname{Im} g^{(1)}_{ik} \; D_{kj}.$$

N_{ij} est donc donné par la relation de dispersion

$$\text{(II-28)} \qquad N_{ij} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1,2} \int_{\substack{\text{(coupure de} \\ \text{gauche de } t_{ik})}} \frac{ds'}{(s'-s)} \operatorname{Im} g^{(1)}_{ik}(s) \, D_{kj}(s') .$$

Comme dans le problème à une voie, la convergence de cette relation de dispersion est assurée grâce au facteur $1/q_i q_j$ qui a été introduit dans la définition de t_{ij} (v. formule (II-1)). Ce facteur permet également de supprimer les singularités cinématiques qui, autrement, apparaitraient dans t_{12} sur la partie non physique de la coupure de droite ($s_1 \leq s \leq s_2$). En effet, dans cet intervalle, $F^{1\,1}_{12}/q_1 q_2$ qui sert à définir $g^{(1)}_{12}(s)$ est une fonction réelle, alors même que $F^{1\,1}_{12}$ et q_2 sont complexes d'après (II-15) et (II-2).

Le système des équations (II-26) et (II-28) permet en principe, de déterminer N et D, donc t(s) à partir de $g^{(1)}_{ij}(s)$. En particulier, si l'on élimine D entre ces deux relations, on obtient une équation intégrale pour N.

$$N_{ij}(s) = g_{ij}^{(i)}(s) + \frac{i}{\pi} \sum_k \int_{s_k}^{\infty} ds' \quad \frac{q_i^3 \, s}{\sqrt{s'}}$$

$$(II\text{-}29) \qquad \left[(s'-s_o)\ g_{ik}^{(1)}(s') - (s-s_o)\ g_{ik}^{(1)}(s) \right] \quad \frac{N_{kj}(s')}{(s'-s)(s'-s_o)} \ .$$

De la même façon que dans le problème à une voie, l'approximation de Zachariasen et Zemach consiste à ne garder que la première itération de (II-29), c'est-à-dire à poser

$$(II\text{-}30) \qquad N_{ij}(s) = g_{ij}^{(1)}(s) \ .$$

on calcule ensuite D à partir de N à l'aide de la relation (II-26)

$$(II\text{-}31) \qquad D_{ij} = \delta_{ij} - \frac{s-s_o}{\pi} \int_{s_i}^{\infty} \frac{q_i^3(s')}{\sqrt{s'}} \quad \frac{g_{ij}^{(1)}(s')ds'}{(s'-s)(s'-s_o)} \ .$$

Le point de soustraction s_o sera choisi de façon à améliorer autant que possible l'approximation (II-30), qui revient, finalement, à remplacer D_{kj} par δ_{kj} dans la relation (II-28). Puisque, au point s_o, D_{kj} est rigoureusement égal à δ_{kj} nous placerons s_o en un point commun à toutes les coupures de gauche. On peut espérer ainsi que (II-30) sera approximativement vérifié si D_{kj} reste voisin de δ_{kj} là où l'intégrand de (II-28) fournit la contribution principale à N_{ij}. D'après (II-18), (II-19), (II-20) et (II-21), si on se restreint aux valeurs de $m_\rho^{\ 2}$ telles que

$$4 - m_\rho^{\ 2} \leq -16$$

soit

$$m_\rho^2 \geq 20, \tag{II-32}$$

la partie commune à toutes les coupures de gauche sera la coupure de t_{11} qui est dûe à l'échange du ρ .

Un autre point de vue à considérer, également, est que, au point s_o, on a automatiquement

$$t_{ij} = g_{ij}^{(1)}$$

il faut donc, physiquement, que cette équation soit à peu près vérifiée c'est-à-dire que les forces que l'on a négligées contribuent peu en s_o. Cela conduit à placer s_o aussi près que possible du début des coupures de gauche.

Nous poserons, par conséquent,

$$s_o = 4 - m_\rho^2 \tag{II-23}$$

de façon à placer, comme dans l'approximation à une voie, s_o au début de la coupure de gauche dûe au ρ dans $\pi\pi \to \pi\pi$.

Il faut faire quelques remarques sur la validité de la méthode employée. En effet, pour établir rigoureusement (II-25) et (II-27) il faut supposer que les coupures de gauche de t_{ij} et les coupures de droite $s \geq s_1$, $s \geq s_2$ ne se chevauchent pas. En réalité, dans notre problème, les coupures de gauche de t_{22} ont un seuil supérieur à s_1 ce

qui fait que (II-25) et (II-27) ne sont pas strictement vérifiés.

Dans l'approximation (II-30), on évite ces difficultés en se restreignant aux valeurs de m_ρ^2 qui sont en dehors des coupures de gauche de t_{22}. En effet, en $s = m_\rho^2$, (II-30) donnera alors une expression réelle pour N et le calcul de D_{22} ne présentera pas de difficultés puisque D_{22} se calcule en intégrant $g_{22}^{(1)}$ seulement à partir de s_2 là où $g_{22}^{(1)}$ est une fonction réelle.

D'après (II-20) et (II-21), cela conduit aux conditions

$$m_\rho^2 \geq 8 \qquad \text{et} \qquad m_\rho^2 \geq 2m_K^2 \simeq 27.$$

Nous nous restreindrons donc aux valeurs de m_ρ^2 supérieures à 27 (la valeur physique est $m_\rho^2 = 30$), ce qui permettra simultanément de satisfaire la condition (II-32).

II-B-3- Résultats numériques.

Nous établissons les équations d'autoconsistance, comme dans la référence (7), en écrivant que les amplitudes t_{ij} calculées à partir de (II-30) et (II-31) doivent passer par une résonance correspondant à l'apparition du ρ dans la voie s.

Tout d'abord, l'existence d'une résonance pour $s = m_\rho^2$ est équivalente à la condition.

(II-34) $$\text{Re det } D(m_\rho^2) = 0$$

ce qui fournit une première équation.

D'autre part, la matrice des résidus de t_{ij} à ce pôle doit être identifiée avec celle que l'on calcule à partir des diagrammes de la figure (8) où le ρ apparaît dans la voie s :

$$(II\text{-}35) \quad \mathcal{R} = \frac{1}{(s-m_\rho^2 + i\,\Gamma_\rho\, m_\rho)} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} f_\pi^2/4\pi & \sqrt{2}/3 \ \frac{f_\pi f_K}{4\pi} \\ \sqrt{2}/3 \ \frac{f_\pi f_K}{4\pi} & -\frac{1}{3} f_K^2/4\pi \end{pmatrix}$$

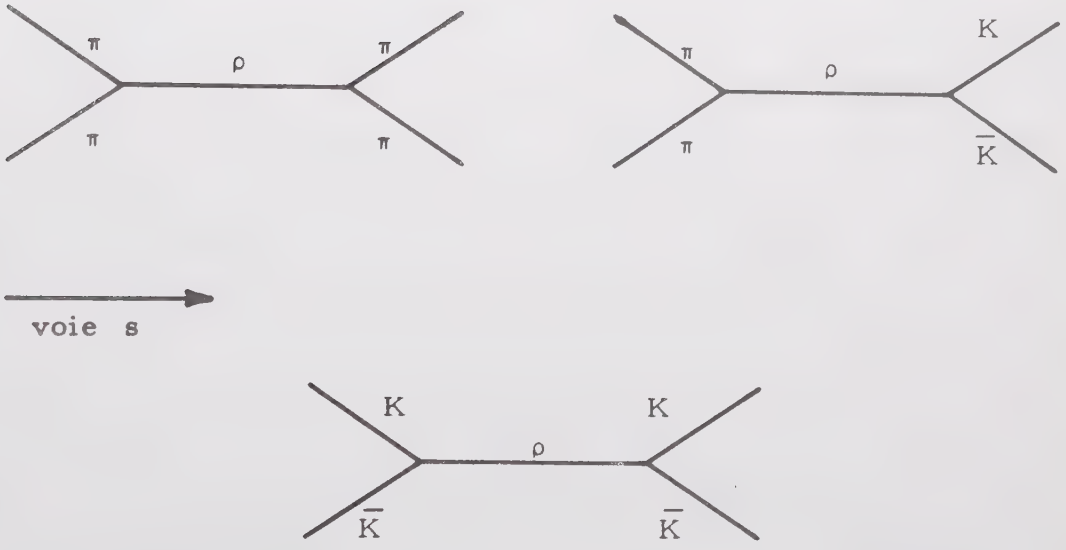


figure (8)

- le ρ dans la voie s.

Au voisinage de la résonance, on peut écrire, si la largeur du ρ est supposée faible devant sa masse :

(II-36) $$\text{Re det } D(m_\rho^2) = R_{11} R_{22} - R_{12} R_{21} = 0 ,$$

(II-37) $$t = ND^{-1} = \frac{N\tilde{R}}{(s-m_\rho^2)(\text{Re det } D)' + i\Gamma m_\rho}$$

où $$R_{ij} = \text{Re } D_{ij} ,$$

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} R_{22} & -R_{12} \\ -R_{21} & R_{11} \end{pmatrix} ,$$

$$(\text{Re det } D)' = \frac{\partial}{\partial s} \text{ Re det } D \Big]_{s = m_\rho^2}$$

on voit donc que $N\tilde{R}$ a automatiquement un déterminant nul. Le renversement du temps impose en plus que cette matrice soit symétrique. Comme la matrice $\mathscr{C}$ calculée en (II-35) satisfait les mêmes conditions, l'identification des résidus ne fournit que deux relations supplémentaires. Nous utiliserons les conditions

$$t_{11} = \mathscr{C}_{11} , \quad t_{22} = \mathscr{C}_{22}$$

qui conduisent aux équations

(II-38) $$\frac{2}{3} \frac{f^2}{4\pi} (\text{Re det } D)' + N_{11} R_{22} - N_{12} R_{21} = 0$$

$$(II\text{-}39) \qquad \frac{1}{3} \quad \frac{f_K^2}{4\pi} \; (\mathrm{Re\ det\ D})' + N_{22} R_{11} - N_{21} R_{12} = o$$

On obtient donc en tout un système de trois équations d'autoconsistance qui doit permettre de déterminer la solution. En réalité, à cause de l'approximation que l'on fait pour résoudre les équations N/D, la matrice des résidus déduite de (II-30) et (II-31) ne sera pas symétrique (*). Nous calculerons un paramètre d'asymétrie Q qui permettra de tester l'approximation :

$$(II\text{-}40) \qquad Q = \frac{t_{12}}{\mathscr{C}_{12}} = \frac{3}{\sqrt{2}\, f_\pi\, f_K / 4\pi\, (\mathrm{Re\ det\ D})'} \left\{ N_{12} D_{11} - N_{11} D_{12} \right\}$$

Pour une matrice t symétrique on aurait Q = ± 1 car les équations (II-38) et (II-39) entraineraient alors seulement que $t_{12}^2 = \mathscr{C}_{12}^2$.

D'un autre côté, l'autoconsistance impose en plus que Q = + 1. On voit que ceci fixe le signe relatif de f_π et de f_K.

(*) Bjorken et Nauenberg [23] ont montré que, si l'on résoud exactement les équations N/D à partir d'un saut sur les coupures de gauche symétrique, comme c'est le cas ici, la solution obtenue est automatiquement elle aussi symétrique.

D'après les résultats précédents, les matrices N et D s'écrivent explicitement :

$$N_{11} = \frac{f_\pi^2}{4\pi} \quad \frac{1}{q_1^2} \quad F_{11}^{1\,1}(s, m_\rho^2),$$

(II-41)
$$N_{12} = N_{21} = \frac{\gamma_{K^*}^2}{4\pi} \quad \frac{1}{q_1 q_2} \quad 2\sqrt{2} \quad F_{12}^{1\,1}(s, m_{K^*}^2),$$

$$N_{22} = \frac{f_Y^2}{4\pi} \quad \frac{1}{q_2^2} \quad F_{22}^{1\,1}(s, m_Y^2) - \frac{f_K^2}{4\pi} \quad \frac{1}{q_2^2} \frac{1}{4} \quad F_{22}^{1\,1}(s, m_\rho^2),$$

(II-42)
$$R_{11} = 1 - \frac{f_\pi^2}{4\pi} \quad I_{11}, \quad R_{22} = 1 - \frac{f_Y^2}{4\pi} \quad I_{22}^Y + \frac{f_K^2}{4\pi} \quad I_{22}^\rho$$

$$R_{12} = - \frac{\gamma_{K^*}^2}{4\pi} \quad 2\sqrt{2} \quad I_{12}, \quad R_{21} = - \frac{\gamma_{K^*}^2}{4\pi} \quad 2\sqrt{2} \quad I_{21}$$

où
$$I_{ij} = \frac{s-s_o}{\pi} \quad P \int_{s_i}^{\infty} \frac{q_i^2(s')}{q_j(s')\sqrt{s'}} \quad \frac{F_{ij}^{1\,1}}{(s'-s)(s'-s_o)}$$

On obtient donc finalement les équations d'autoconsistance

(II-43-a) $$\text{Re det } D = \left(1 - \frac{f_\pi^2}{4\pi} I_{11}\right)\left(1 - \frac{f_Y^2}{4\pi} I_{22}^Y + \frac{f_K^2}{4\pi} I_{22}^\rho\right) - 8\left(\frac{\gamma_{K^*}^2}{4\pi}\right)^2 I_{12} I_{21} = 0$$

$$\frac{2}{3}\frac{f_\pi^2}{4\pi}(\text{Re det } D)' + \frac{f_\pi^2}{4\pi}\frac{1}{q_1^2} F_{11}^{11}(m_\rho^2, m_\rho^2)\left(1 - \frac{f_Y^2}{4\pi} I_{22}^Y + \frac{f_K^2}{4\pi} I_{22}^\rho\right)$$

(II-43-b)

$$+ \left(\frac{\gamma_{K^*}^2}{4\pi}\right)^2 \frac{8}{q_1 q_2} F_{12}^{11}(m_\rho^2, m_{K^*}^2) I_{21} = 0$$

$$\frac{1}{3}\frac{f_K^2}{4\pi}(\text{Re det } D)' + \left[\frac{f_Y^2}{4\pi}\frac{1}{q_2^2} F_{22}^{11}(m_\rho^2, m_Y^2) - \frac{f_K^2}{4\pi}\frac{1}{q_2^2}\right.$$

(II-43-c) $$\left. F_{22}^{11}(m_\rho^2, m_\rho^2)\right]\left(1 - \frac{f_\pi^2}{4\pi} I_{11}\right) + 8\left(\frac{\gamma_{K^*}^2}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{q_1 q_2} I_{12}$$

$$F_{12}^{11}(m_\rho^2, m_{K^*}^2) = 0.$$

(Dans ces relations q_1 et q_2 doivent être évaluées pour $s = m^2$).

Si l'on examine les équations (I-43), on voit qu'elles font intervenir 8 paramètres : m_K^2, $m_{K^*}^2$, m_Y^2, m_ρ^2, $f_\pi^2/4\pi$, $f_K^2/4\pi$, $\gamma_{K^*}^2/4\pi$, $f_Y^2/4\pi$. Les équations d'autoconsistance ne sont donc plus suffisantes pour déterminer exactement la solution. Nous allons étudier

le système (II-43) en faisant les hypothèses suivantes : nous donnons leurs valeurs physiques à m_K^2, $m_{K^*}^2$, m_Y^2 :

$$m_K^2 = 13,2 \quad , \quad m_{K^*}^2 = 41 \quad , \quad m_Y^2 = 45$$

et nous supposons que les constantes de couplage du ρ satisfont la relation

(II-44) $$f_\pi^2/4\pi = f_K^2/4\pi \quad .$$

Cette égalité peut être déduite soit de la symétrie SU_3 exacte, soit de l'universalité de Sakurai [13]. Bien que f_K ne soit pas connu expérimentalement, cette dernière hypothèse est jusqu'à présent en accord avec l'expérience (*).

Ce système (II-43) ne contient plus alors que quatre inconnues et nous allons obtenir une famille de solutions dépendant d'un paramètre. Le plus commode est de choisir la masse du ρ comme paramètre, puisque, pour m_ρ^2 fixé, (II-43) constitue un système d'équations algébriques dans les constantes de couplages. Nous avons résolu le système pour plusieurs valeurs de m_ρ^2 dans l'intervalle.

(II-45) $$2m_K^2 \leq m_\rho^2 \leq 4m_K^2 \quad .$$

(*) Cette question a été discutée, il y a quelques temps par Sakurai : "1962 International Conference on High Energy Physics" C.E.R.N. p. 176. Elle sera examinée de nouveau dans la conclusion.

La méthode employée est la suivante : pour une valeur donnée de $f_\pi^2/4\pi$ les systèmes d'équations a, b et a, c de (II-43) permettent chacun de déterminer une valeur de $f_Y^2/4\pi$. Nous avons fait varier $f_\pi^2/4\pi$ jusqu'à obtenir l'autoconsistance, c'est-à-dire jusqu'à ce que les deux valeurs calculées de $f_Y^2/4\pi$ coincident. Ceci détermine la solution. Celle-ci une fois connue, nous avons calculé le paramètre d'asymétrie Q dont l'expression se déduit des relations (II-40), (II-41) et (II-42) :

$$Q = 6\,\frac{\gamma_{K^*}^2}{4\pi}\,\frac{1}{f_\pi f_K/4\pi\,(\mathrm{Re\,det\,D})'}\left\{\frac{1}{q_1 q_2}\,F_{12}^{11}(m_\rho^2, m_{K^*}^2)\right.$$

(II-46)

$$\left.\left(1-\frac{f_\pi^2}{4\pi}\,I_{11}\right)+\frac{1}{q_1^2}\,\frac{f_\pi^2}{4\pi}\,F_{11}^{11}(m_\rho^2, m_\rho^2)\,I_{12}\right\}$$

Si l'on suppose que notre approximation donne au moins le même signe pour Q que la solution exacte, la condition $Q > o$ permet alors de déterminer le signe relatif de f_π et de f_K.

Les résultats numériques obtenus sont rapportés sur le tableau (9) (v. page suivante).

De plus la condition $Q > o$ impose que

$$f_\pi\ f_K < o.$$

m_ρ^2	27,5	30	40	50
$f_\pi^2/4\pi$	8,5	10,4	10	9,2
$\gamma_{K^*}^2/4\pi$	0,8	3,2	2,3	1,3
$f_Y^2/4\pi$	26	48	37	21
Q	1,3	0,93	0,8	0,8

tableau 9

résultats de l'approximation à une particule échangée.

Il est d'abord très satisfaisant de remarquer que ce signe négatif est en accord avec SU_3 et avec l'universalité de Sakurai qui nous avaient servi à justifier la condition (II-44).

D'un autre côté, la valeur physique de $f_\pi^2/4\pi$ est, rappelons le, $f_\pi^2/4\pi = 2$. En comparant aux résultats de l'approximation à une voie (paragraphe I-B) avec échange du ρ seul, on voit que l'introduction d'une deuxième voie n'a pas réduit $f_\pi^2/4\pi$ à une valeur plus satisfaisante. Ceci confirme notre conclusion du chapitre I, à savoir que les forces dûes à l'échange d'une seule particule sont insuffisantes pour engendrer le ρ.

A partir de la largeur du K^* ($\Gamma_{K^*} = 50$ MeV)[1] on déduit que

$$\gamma_{K^*}^2/4\pi \simeq 0,9 ;$$

la valeur physique de la troisième constante de couplage $f_Y^2/4\pi$ se calcule à partir de la largeur du ϕ [1]

$$\Gamma_\phi \simeq 3 \text{ MeV}$$

en effet, puisque le membre du singulet Z n'est pas couplé à $K\bar{K}$, la constante de couplage $\phi K\bar{K}$ f_ϕ est reliée à f_Y par la relation

$$f_\phi = \cos\lambda \; f_Y$$

où λ est l'angle de mélange $\omega - \phi$ ($\cos\lambda \simeq 0,98$).

Un calcul numérique simple montre alors que

(II-47) $$f_Y^2/4\pi \simeq 1,2$$

En comparant ces valeurs expérimentales à celles qui sont indiquées sur le tableau (9) on voit que les valeurs de $\gamma_{K^*}^2/4\pi$ calculées sont presque satisfaisantes, mais que par contre celles de $f_Y^2/4\pi$ sont beaucoup trop grandes.

De même qu'au paragraphe (II-B), nous avons fait varier le point de soustraction s_o de façon à tester l'approximation utilisée. Pour cela nous avons résolu les équations d'autoconsistance en fixant m_ρ^2 à sa valeur physique pour plusieurs valeurs de s_o. On s'aperçoit alors que la solution obtenue a les mêmes défauts que la solution à une voie discutée au paragraphe (I-B). En effet, elle dépend très fortement de s_o, ainsi pour $s_o = 4 - 2\, m_\rho^2$ on obtient

$$f_\pi{}^2/4\pi \simeq 13\,, \qquad \gamma_{K^*}{}^2/4\pi \simeq 15\,, \qquad \frac{f_Y{}^2}{4\pi} \simeq 200\,.$$

De plus si l'on donne à s_o des valeurs inférieures à celle-ci, $f_Y{}^2/4\pi$ devient infini pour une valeur de s_o proche de $4\text{-}2\, m_\rho{}^2$ puis la solution disparait. Il n'y a plus de solution, par exemple, pour $s_o = 4 - 3\, m_\rho{}^2$. Ceci jette le doute sur la validité des solutions, puisqu'elles ne devraient pas dépendre de s_o.

On voit donc, en fin de compte, que dans l'approximation à une particule échangée, l'addition d'une deuxième voie n'améliore pas les résultats numériques. Les aspects qualitatifs du modèle sont satisfaisants, mais il reste impossible d'obtenir un accord, même grossier, avec l'expérience.

II-C - GENERATION DU ρ PAR LES FORCES DUES A L'ECHANGE D'UNE ET DE DEUX PARTICULES

II-C-1 - Forces produites par l'échange de deux particules

Nous n'allons considérer que les forces de plus grandes portées c'est-à-dire qui sont dûes à l'échange de $\pi - \pi$ et de $K\text{-}\pi$. Il est facile de voir que les termes suivants comportent l'échange de $K\bar{K}$, de $K\eta$ de KK et de $\pi\omega$.

Les seuils de ces états étant de l'ordre de 1 GeV il est raisonnable de négliger ces forces qui ont une courte portée. (Nous reviendrons sur cette question au chapitre III).

1°) Forces dûes à l'échange de $\pi\pi$ dans t_{11}

Elles ont déjà été calculées au chapitre I. Nous écrivons à nouveau l'expression obtenue dans les notations appropriées au problème à deux voies. Nous appellerons ici $g_{11}^{(2)}(s)$ la fonction définie par (I-48) pour $\ell = 1$, $I = 1$. Cette fonction s'écrit, compte tenu de (II-15) et (II-16)

$$g_{11}^{(2)}(s) = \left(\frac{f_\pi^2}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{q_1^2(s)} \frac{1}{\pi} \int_4^\infty dt' \left\{ \frac{1}{q_1^2(s)} \frac{q_1(t')}{\sqrt{t'}} \right.$$

$$\text{(II-55)}\quad F_{11}^{1\,0}(s,t') \left[F_{11}^{0\,1}(t', m_\rho^2)\right]^2 + \frac{3}{2} \frac{1}{q_1(t')\sqrt{t'}} F_{11}^{1\,1}(s,t')$$

$$\left. \left[F_{11}^{1\,1}(t', m_\rho^2)\right]^2 \right\}$$

2°) Forces dûes à l'échange de K-π dans t_{12}.

Les deux voies croisées de la réaction $\pi\pi \to K\bar{K}$ décrivent toutes deux la diffusion $K\pi \to K\pi$. Le premier état intermédiaire est de nouveau $K\pi$. Considérons le processus d'échange de K-π dans la voie t (voir 10-1). Il fait intervenir de nouveau la diffusion K-π. Comme dans le problème à une voie, nous allons considérer la force correspondant au quatrième ordre en remplaçant les "boites noires" de la figure (10-1) par les termes d'échange d'une seule particule.

Dans la diffusion K- π , le ρ et le K* peuvent être échangés. Cela conduit donc aux diagrammes de la figure (10-2).

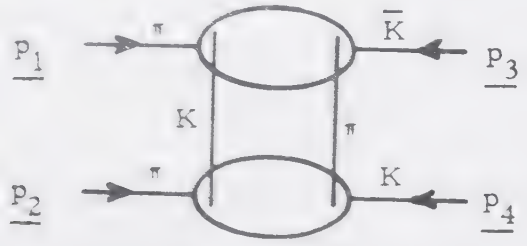


figure (10-1)

Echange de K -π dans la voie t pour $\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$

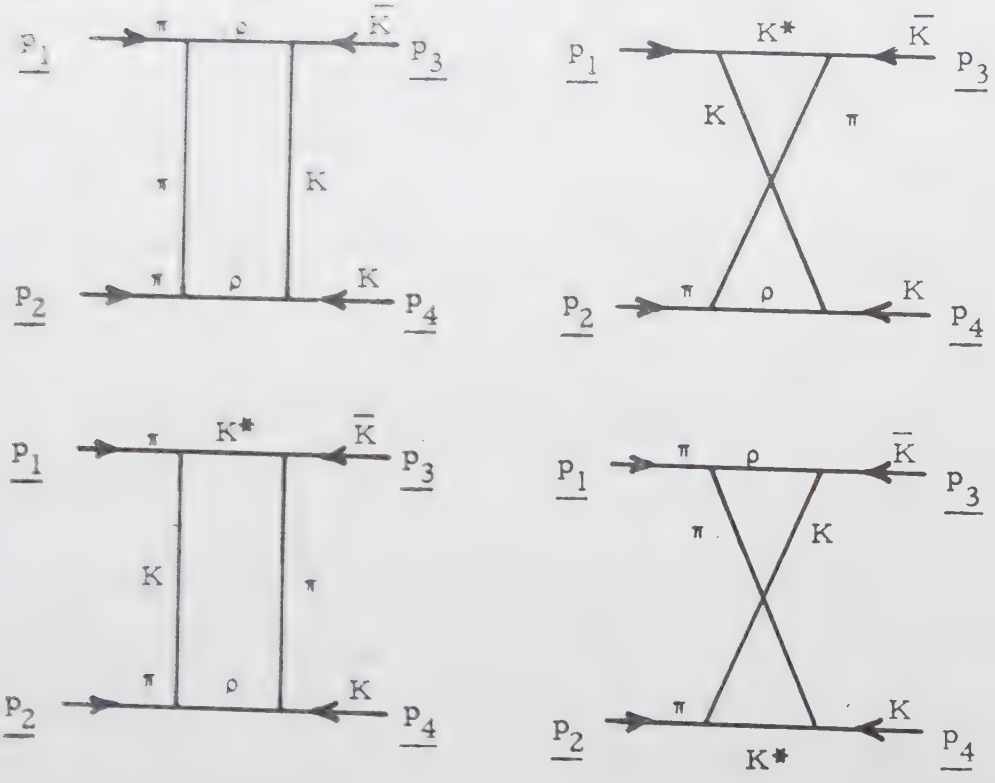


figure (10-2)

Echange de Kπ dans la voie t au quatrième ordre

Figure 10

Pour calculer le saut correspondant de $t_{12}(s)$, il nous faut évaluer la partie absorptive $A_{12,t}$ des diagrammes (10-2) pour $t > (m_K+1)^2$. Cela peut être fait, en écrivant l'unitarité élastique dans la voie t. On obtient, si l'on développe en ondes partielles dans cette voie

$$A^{I'}_{12,t} = \theta(t-s_3)\ \frac{q_3(t)}{\sqrt{t}}\ \sum_{\ell'}\ \frac{2\ell'+1}{4\pi}\ P_{\ell'}(\cos\theta')$$

(II-56)

$$\left[B^{\rho\ \ell' I'}_{33}(t) + B^{K^*\ell'\ I'}_{33}(t)\right]^2 \quad ;$$

dans cette formule, I' et ℓ' sont respectivement le spin isotopique total et le moment angulaire dans la voie t. Nous avons attribué l'indice 3 à la voie $K\pi$. Par conséquent q_3 est l'impulsion dans le centre de masse de cette voie

(II-57)
$$q_3^2(t) = \frac{1}{4t}\ (t-(m_K+1)^2)\ (t-(m_K-1)^2)$$

et s_3 le seuil de la diffusion $K\pi$

$$s_3 = (m_K+1)^2 \simeq 21.$$

Suivant une convention analogue à celle des formules (II-12), B^{ρ}_{33} et $B^{K^*}_{33}$ décrivent, respectivement, l'échange du ρ et du K^* dans la diffusion $K-\pi$

$$B_{33}^{\rho\, \ell\, I}(t) = -\frac{f_\pi f_K}{4\pi}\; C_{1\,0}^{I\;1}\; F_{33}^{\rho\, \ell\, I}(t,\, m_\rho{}^2)$$

(II-58)

$$B_{33}^{K^*\, \ell\, I}(t) = (-1)^{\ell+1}\; \frac{\gamma_{K^*}{}^2}{4\pi}\; 3\; C_{1\;1}^{I\;1/2}\; F_{33}^{K^*\, \ell\, 1}(t,\, m_{K^*}{}^2\;).$$

Comme en (II-12), les matrices $C^{II'}$ décrivent les propriétés de croisement du problème π -K

(II-59)
$$C_{1\;1}^{I\;I''} = \begin{pmatrix} -1/3 & 4/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

(II-60)
$$C_{1\;0}^{I\;I'} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1 \\ 1/\sqrt{6} & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Les fonctions $F_{33}(x, y)$ qui apparaissent en (II-58) sont données par les formules (II-15) à condition de poser

(II-61)
$$b_{33}^{\rho} = 1 + \frac{y}{2q_3{}^2(x)}$$

$$a_{33}^{\rho} = 1 + \frac{1}{2q_3{}^2(x)}\left[x - \frac{(m_K{}^2-1)^2}{x}\right],$$

$$b_{33}^{K^*} = 1 + \frac{1}{2q_3{}^2(x)}\left[y - \frac{(m_K{}^2-1)^2}{x}\right],$$

$$a_{33}^{K^*} = 1 + \frac{1}{2q_3{}^2(x)}\left[x - \frac{(m_K{}^2-1)^2}{y}\right].$$

Enfin θ', l'angle de diffusion dans la voie t, s'écrit :

$$\cos\theta' = \frac{1}{4q_3^{\,2}(t)} \left[s - u + \frac{(m_K^{\,2}-1)^2}{t} \right] \qquad \text{(II-62)}$$

De la même façon que pour $t_{11}(s)$, nous ne garderons que les deux premiers termes de (II-56) et nous définirons une fonction analytique $g_{12}^{(2)}(s)$ associée à ces forces. La méthode utilisée est la même qu'au paragraphe (I-D) avec cependant une complication qui s'introduit parce que, ici les particules qui réagissent n'ont pas toutes la même masse. Pour $\ell' = 1$, l'onde partielle s'annule au seuil de la voie π K si bien que la première idée serait d'écrire, par analogie avec (I-48) une relation de dispersion pour l'onde partielle $\ell' = 1$ divisée par $q_3^{\,2}(t)$. Ceci ne conduirait pas au résultat voulu car, d'après (II-62), le produit $q_3^{\,2}(t) \cos\theta'$, qui apparaitrait dans $g_{12}^{(2)}$, s'écrit

$$q_3^{\,2}(t) \cos\theta' = \frac{1}{4} \left[s - u + \frac{(m_K^{\,2}-1)^2}{t} \right] .$$

On introduirait alors une singularité cinématique puisque cette expression possède un pôle en t = o. Pour surmonter cette difficulté, nous allons définir $g_{12}^{(2)}$ par la formule : (il faut doubler pour tenir compte des deux voies croisées) :

$$g_{12}^{(2)}(s) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}\; q_1(s) q_2(s)} \int_{-1}^{+1} \cos\theta \; d(\cos\theta)$$

$$\left\{ (t-t_1) \int_{s_3}^{\infty} \frac{q_3(t')}{\sqrt{t'}} \; \frac{dt'}{(t'-t)(t'-t_1)} \left[\left(\frac{f_\pi f_K}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{2} \left(F_{33}^{\rho\, 0\, 1}(t', m_\rho^2) \right)^2 \right.\right.$$

$$\left.\left. -2 \left(\frac{\gamma_{K^*}^2}{4\pi} \right)^2 \left(F_{33}^{K^*\, 0\, 1}(t', m_{K^*}^2) \right)^2 \right] \right.$$

(II-63)

$$+ \frac{3}{\pi} \int_{s_3}^{\infty} \frac{1}{q_3(t')\sqrt{t'}} \; \frac{dt'}{(t'-t)} \; \frac{1}{4} \left[s - u + \frac{(m_K^2-1)^2}{t'} \right]$$

$$\left[\left(\frac{f_\pi f_K}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{2} \left(F_{33}^{\rho\, 1\, 1}(t', m_\rho^2) \right)^2 - 2 \left(\frac{\gamma_{K^*}^2}{4\pi} \right)^2 \left(F_{33}^{K^*\, 1\, 1}(t', m_{K^*}^2) \right) \right.$$

Cette expression est obtenue par la même méthode que (II-55). La seule différence est que nous avons mis le produit $q_3^2(t)\cos\theta'$ sous le signe d'intégration en remplaçant $(m_K^2-1)^2/t$ par $(m_K^2-1)^2/t'$.

De cette façon, les singularités de $g_{12}^{(2)}$ ne proviennent plus que de l'annulation des dénominateurs $(t'-t)$. Le second membre de (II-63) ne possède donc que la coupure de gauche de t_{12} produite par l'échange de K- π . De plus, son saut sur cette coupure étant calculé en remplaçant $1/(t'-t)$ par $\pi\,\delta(t'-t)$ dans l'intégrale, est bien égal au double de la

projection des deux premiers termes de (II-56) sur $\ell = 1$, $I = 1/2$, comme il est nécessaire pour introduire ces forces dans les équations N/D.

Comme pour t_{11}, le signe des forces est déterminé par le signe de sommes de produits de trois coefficients de croisement. Ainsi, le coefficient du terme en $(\gamma_{K^*}^2/4\pi)^2$ s'écrit :

$$\sum_{I' = 1/2, 3/2} C_{0\ 1}^{1\ I'} \left(C_{1,1}^{I'\ 1/2}\right)^2 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{2}{9}$$

on obtient ainsi une force répulsive car la répulsion produite par $I' = 3/2$ l'emporte sur l'attraction fournie par $I' = 1/2$.
Au contraire, celui de $(f_\pi f_K/4\pi)^2$ est donné par

$$\sum_{I' = 1/2,\ 3/2} C_{0\ 1}^{1\ I'} \left(C_{1\ 0}^{I'\ 1}\right)^2 = \frac{2}{3}(\times 1)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

et l'on a attraction;.
Enfin il n'y a pas terme en $f_\pi f_K/4\pi \times \gamma_{K^*}^2/4\pi$ dans l'égalité (II-57) car

$$\sum_{I' = 1/2,\ 3/2} C_{0\ 1}^{1\ I'} \quad C_{1\ 1}^{I'\ 1/2} \quad C_{1\ 0}^{I'\ 1} = 0$$

ce qui montre que les diagrammes de la figure (10-2) où les lignes interieures sont croisées ne fournissent aucune force.

On obtient finalement l'expression explicite de $g_{12}^{(1)}(s)$ en intégrant sur cos θ au moyen de (II-15)

$$g_{12}^{(2)}(s) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}\, q_1 q_2} \int_{s_3}^{\infty} dt' \left\{ \frac{2}{q_1(s) q_2(s)} \frac{q_3(t')}{\sqrt{t'}} F_{12}^{1\,0}(s,t') - \right.$$

$$\left\{ \left(\frac{f_\pi f_K}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{2} \left[F_{33}^{\rho 0\,1}(t', m_\rho^2) \right]^2 - 2 \left(\frac{\gamma_{K^*}^2}{4\pi} \right)^2 \left[F_{33}^{K^* 0\,1}(t', m_{K^*}^2) \right] \right\}^2$$

(II-64)

$$+ \frac{3}{q_3(t')\sqrt{t'}} F_{12}^{1\,1}(s,t') \left\{ \left(\frac{f_\pi f_K}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{2} \left[F_{33}^{\rho\,1\,1}(t', m_\rho^2) \right]^2 \right.$$

$$\left. \left. - 2 \left(\frac{\gamma_{K^*}^2}{4\pi} \right)^2 \left[F_{33}^{K^* 1\,1}(t', m_{K^*}^2) \right]^2 \right\} \right\}$$

3°) Forces dûes à l'échange de $\pi - \pi$ dans $K\bar{K} \to K\bar{K}$.

Comme nous l'avons déjà indiqué, nous négligeons les forces provenant des états intermédiaires de la voie u.

Dans la voie t, la réaction est , de nouveau, $K\bar{K} \to K\bar{K}$ le premier état intermédiaire étant $\pi\pi$ (voir figure (11-1)). Nous tenons compte de ces forces du quatrième ordre en introduisant les diagrammes de la figure (11-2)

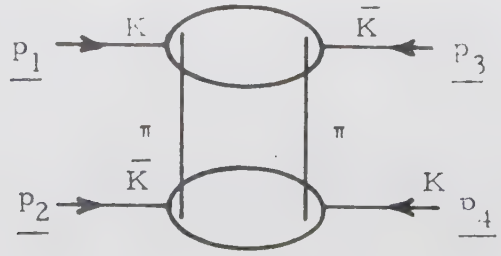


figure (11-1) Echange de $\pi - \pi$ dans $K\bar{K} \to K\bar{K}$

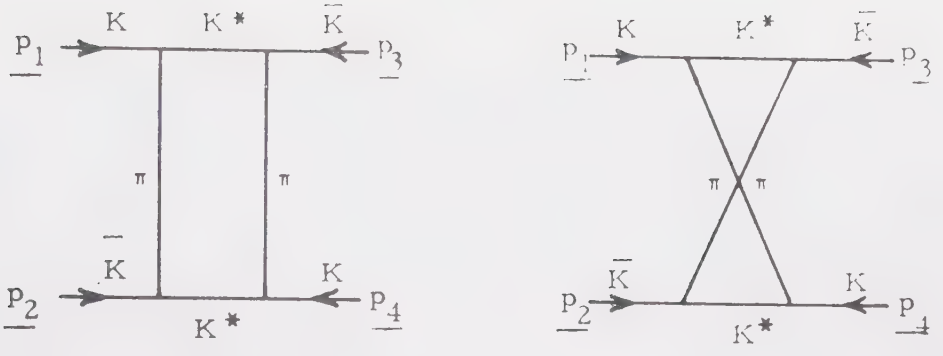


figure (11-2)

Echange de $\pi - \pi$ à l'ordre 4.

On obtient ainsi la partie absorptive

$$A_{22}^{I'} = \frac{1}{2}\ \theta\,(t-s_1)\ \frac{q_1(t)}{\sqrt{t}}\ \sum_{\ell'}\ \frac{2\ell'+1}{4\pi}\ P_{\ell'}(\cos\theta')\left[2\,B_{12}^{\ell' I'}(t')\right]^2 ,$$

et un raisonnement analogue au précédent conduit à introduire la fonction

$$g_{22}^{(2)}(s) = \left(\frac{\gamma_{K^*}^2}{4\pi}\right)^2 \frac{6}{\pi\ q_2^{\,2}(s)} \int_{s_1}^{\infty} dt' \left\{ \frac{1}{q_2^{\,2}(s)}\ \frac{q_1(t')}{\sqrt{t'}} \right.$$

(II-65)

$$F_{22}^{1\,0}(s,t')\ \left[F_{12}^{0\,1}(t',\ m_{K^*}^{\,2})\right]^2$$

$$\left. - \frac{q_1(t')}{q_2^{\,2}(t')\sqrt{t'}}\ F_{22}^{1\,1}(s,t')\ \left[F_{12}^{1\,1}(t',\ m_{K^*}^{\,2})\right]^2 \right\}$$

4°) Conclusion

Nous sommes maintenant prêts à introduire notre nouvelle approximation des forces dans les équations N/D. Nous allons chercher à déterminer l'onde partielle $t_{ij}(s)$ en supposant qu'elle a les mêmes coupures de gauche que la fonction $(t_L)_{ij}$ définie par

$$(t_L)_{ij} = g_{ij}^{(1)} + g_{ij}^{(2)} \quad , \tag{II-66}$$

son saut sur ces coupures étant égal à celui de $(t_L)_{ij}$:

$$\text{Im } t_{ij}(s) = \text{Im } (t_L)_{ij}(s).$$

II-C-2 - Résultats numériques

Si l'on écrit

$$t = ND^{-1},$$

N et D seront déterminés, en principe, par les équations (II-26) et (II-29) à condition d'y remplacer $g_{ij}^{(1)}$ par $(t_L)_{ij}(s)$.

$$N_{ij}(s) = (t_L)_{ij}(s) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1,2} \int_{s_k}^{\infty} ds' \, \frac{q_k^{\,3}(s')}{\sqrt{s'}} \tag{II-67}$$

$$\left[(s'-s_o)(t_L)_{ik}(s') - (s-s_o)(t_L)_{ik}(s)\right] \frac{N_{kj}(s')}{(s'-s)(s'-s_o)} \quad ,$$

$$(II\text{-}68)\quad D_{ij}(s) = \delta_{ij} - \frac{s-s_o}{\pi} \int_{s_i}^{\infty} \frac{q_i^{\,3}(s')}{\sqrt{s'}} \quad \frac{N_{ij}(s')}{(s'-s)(s'-s_o)}\, ds'$$

De la même façon que dans le problème à une voie (paragraphe I-D), nous résoudrons approximativement (II-67) en négligeant tous les termes qui sont d'un ordre supérieur à quatre dans les constantes de couplage. Cela conduit à garder une partie de la deuxième itération de (II-67) :

$$N_{ij}(s) = (t_L)_{ij}(s) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1,2} \int_{s_k}^{\infty} ds' \quad \frac{q_k^{\,3}(s')}{\sqrt{s'}}$$

(II-69)

$$\left[(s'-s_o)\, g_{ik}^{(1)}(s') - (s-s_o)\, g_{ik}^{(1)}(s)\right] \quad \frac{g_{kj}^{(1)}(s')}{(s'-s)(s'-s_o)}$$

Ensuite nous déduirons D de N par (II-68) de façon à obtenir une approximation unitaire sur la coupure de droite.

Le choix de s_o doit se faire selon les mêmes critères que dans le modèle à une particule échangée. En effet, ici aussi, il est nécessaire de placer s_o de façon à rendre aussi petites que possible les itérations de (II-67) que nous négligeons. Pour choisir s_o, il faut donc, en principe considérer simultanément toutes les coupures de gauche. Malgré tout il est facile de voir que la coupure de gauche de chaque onde partielle introduite au paragraphe (II-B) constitue une partie de la coupure à deux particules échangées ajoutée dans ce paragraphe. Ceci fait que, dans notre nouvelle approximation, la partie commune à toutes les coupures de gauche reste identique à la coupure dûe à l'échange du ρ dans t_{11}. Cela conduit à placer, comme précédemment, s_o au début de

cette coupure en posant :

$$s_0 = 4 - m_\rho^2 \qquad \text{(II-70)}$$

Il apparait des difficultés à cause des coupures de gauche de t_{22} puisque, comme au paragraphe (II-B) les coupures de droite et de gauche de cette onde partielle se chevauchent. La coupure de gauche de t_{22} s'étend, en effet, à partir de $s = 4(m_K^2 - 1)$ soit $s = 51$. La valeur physique de m_ρ^2 est donc sur cette coupure ce qui fait que même l'expression approchée (II-69) conduit à une inconsistance puisqu'elle a une partie imaginaire là où nous cherchons à engendrer le ρ. Malgré tout, cette partie imaginaire est faible car elle provient du début de l'intégration dans la formule (II-65) où l'intégrand reste assez petit. Nous surmonterons cette difficulté en négligeant le début de l'intégrale (II-65). De plus, comme au paragraphe (II-B) nous supposerons que $m_\rho^2 > 27$ pour éviter les difficultés dûes à la coupure produite par l'échange du ρ dans t_{22}.

A partir de la nouvelle approximation de N et de D, les équations d'autoconsistance s'établissent de la même façon que précédemment. Elles sont donc données par (II-36), (II-38) et (II-39) où maintenant N et D ont les expressions indiquées en (II-68) et (II-69). De même, nous introduisons un facteur d'asymétrie Q qui se calcule à partir de (II-40), (II-68) et (II-69) Le signe de Q permettra de déterminer le signe relatif de f_π et de f_K dans la nouvelle approximation. Il est très important, évidemment, de vérifier que ce signe est le même dans les deux cas considérés.

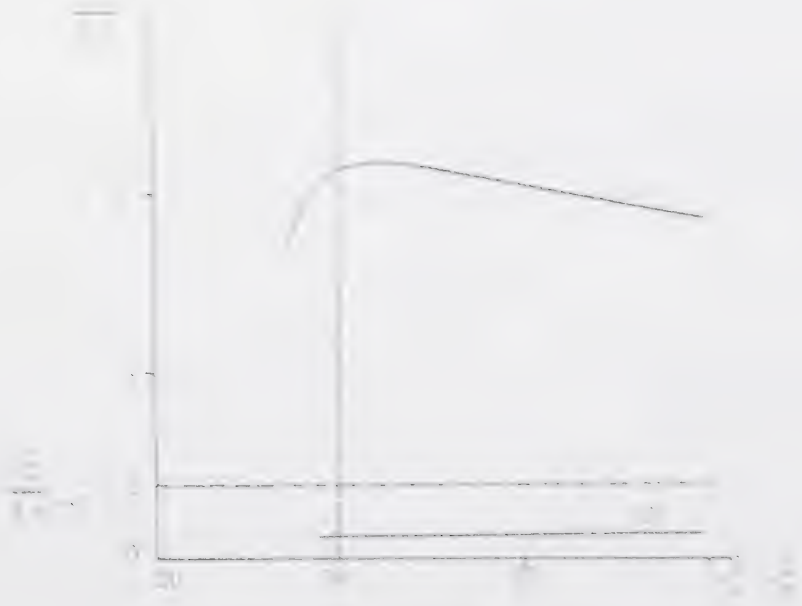
On constate facilement que les forces d'échange de deux particules que nous ajoutons dans ce paragraphe n'introduisent pas de nouveau paramètre dans la théorie. Nous allons donc étudier les équations d'autoconsistance en faisant les mêmes hypothèses qu'au paragraphe (II-B). Pour une valeur donnée de m_ρ , on obtient ainsi de nouveau un système d'équations algébriques dans les constantes de couplage. Ce système a été résolu de la façon suivante (*).

Pour une valeur donnée de $\gamma^2_{K^*}/4\pi$, il prend la forme de trois équations du second degré qui permettent de calculer $f_y{}^2/_{4\pi}$ en fonctions de $f_\pi{}^2/_{4\pi}$. Il n'apparait pas d'ambiguité car chacune de ces équations ne possède qu'une seule racine positive. On trace ainsi trois courbes dans le plan $f_y{}^2/4\pi$, $f_\pi{}^2/4\pi$. Il ne reste plus alors qu'à faire varier $\gamma^2_{K^*}/4\pi$ jusqu'à ce que l'autoconsistance soit réalisée, c'est-à-dire jusqu'à ce que les trois courbes coincident en un point. On calcule enfin le paramètre Q de la solution ainsi déterminée.

Les résultats numériques sont représentés sur les figures (12), (13) et (14). Sur la figure (12), la courbe (2) montre la relation entre $f^2_\pi/4\pi$ et $m_\rho{}^2$ obtenue dans notre modèle tandis que, pour permettre

---

(*) Les intégrales, simples et doubles, qui apparaissent dans les équations ont été calculées numériquement à l'aide d'une UNIVAC 1 107.



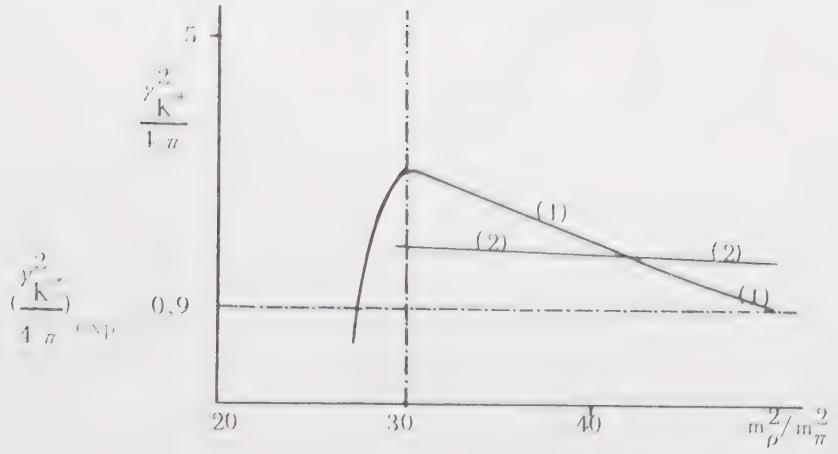


Figure (13)

Relations entre $\gamma K^{*2}/4\pi$ et $m_\rho{}^2$:

a) dans le modèle à une particule échangée : courbe (1)

b) dans notre modèle : courbe (2)

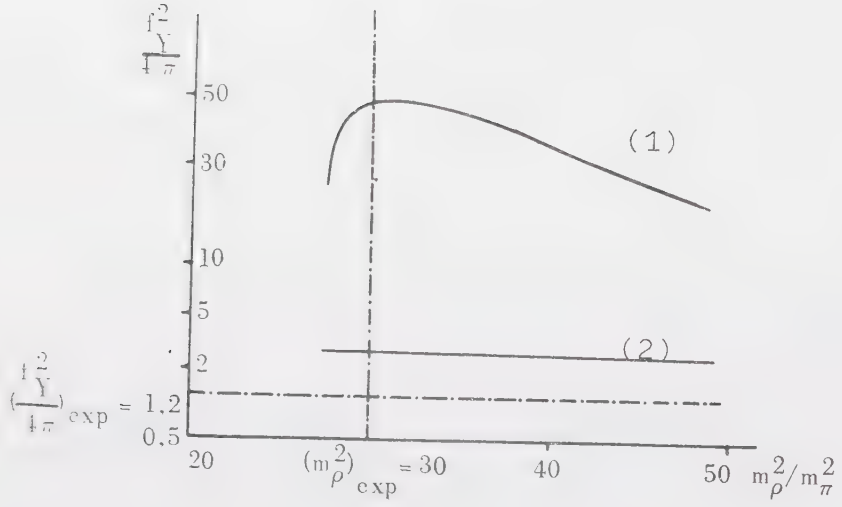


Figure (14)

Relations entre $f_y^2/4\pi$ et m_ρ^2

a) dans le modèle à une particule échangée : courbe (1)

b) dans notre modèle : courbe (2)

(L'échelle verticale n'est pas linéaire)

de comparer, nous avons reproduit par la courbe (1) les résultats de l'approximation à une particule échangée indiqués au tableau (9). De même, les figures (13) et (14) indiquent respectivement les variations de ${}^{\gamma}K^{*2}/4\pi$ et de $f_{Y}^{2}/4\pi$ en fonction de m_{ρ}^{2} obtenues dans les deux cas.

On voit sur ces courbes que si l'on donne à m_{ρ} sa valeur physique, on obtient :

(II-71) $\quad f_{\pi}^{2}/4\pi \simeq 0,5 \; ; \; {}^{\gamma}K^{*2}/4\pi \simeq 2,2 \; ; \; f_{Y}^{2}/4\pi \simeq 2,6 \; ;$

le paramètre d'asymétrie étant

$$Q \simeq 1,2 \quad \text{pour} \quad f_{\pi} \; f_{K} < 0.$$

Les valeurs physiques des constantes de couplage sont, rappelons le :

$$f_{\pi}^{2}/4\pi \simeq 2 \; ; \quad {}^{\gamma}K^{*2}/4\pi \simeq 0,9 \; , \quad f_{Y}^{2}/4\pi \simeq 1,2 \; .$$

Bien qu'on puisse pas parler d'un véritable accord avec l'expérience, les valeurs calculées ont maintenant un ordre de grandeur satisfaisant. En particulier, si l'on compare les courbes (1) et (2) des figures (12) et (14) on voit que les valeurs calculées de $f_{\pi}^{2}/4\pi$ et de $f_{Y}^{2}/4\pi$ ont été grandement améliorées par l'introduction des nouvelles forces. Ceci fait penser que l'on améliore véritablement l'approximation des forces en ajoutant approximativement les termes d'échange de deux particules comme nous l'avons fait dans ce paragraphe.

D'un autre côté, il est satisfaisant de constater que, comme nous l'espérions, l'amélioration de l'unitarité a permis de retrouver la

la solution autoconsistante que l'introduction des termes dûs à l'échange de deux π avait fait disparaitre dans l'approximation à une voie (voir paragraphe (I-D). L'inélasticité semble donc jouer un rôle essentiel dans la génération du ρ. Un résultat analogue a été obtenu par Kreps, Cook, Brehm, et Blankenbecler [25] dans un modèle complètement différent de l'amplitude $\pi\pi$ basé sur l'emploi de fonctions d'essai.

Il nous faut maintenant faire varier s_o de façon à tester la validité des approximations. En choisissant $s_o = 4 - 2m_\rho^2$, nous avons obtenu, pour $m_\rho^2 = 30$,

$$f_\pi^2/4\pi \simeq 0,6 \; ; \quad \gamma_{K^*}^2/4\pi \simeq 2,1 \; ; \quad f_Y^2/4\pi \simeq 2,7.$$

La solution est donc pratiquement inchangée (voir formule (II-71)). Il semble, par conséquent, que la méthode employée pour résoudre les équations N/D soit valable, puisque la solution obtenue dépend peu du point de soustraction. Ceci constitue un grand progrès par rapport à l'approximation à une particule échangée où, au contraire, la solution dépendait fortement de s_o.

Enfin il faut souligner que l'introduction des forces à deux particules n'a pas modifié les aspects qualitatifs du modèle basé sur les forces d'échange d'une particule. En effet, dans les deux modèles on obtient des solutions bien définies et acceptables physiquement (les carrés des constantes de couplage sortent positifs ce qui n'est pas du tout évident à priori). De plus les forces les plus importantes c'est-à-dire l'échange du ρ et l'échange de $\pi - \pi$ ont le même signe. Enfin dans les deux approximations l'autoconsistance impose que le signe relatif de f_π et de f_K soit négatif.

° ° °

CHAPITRE III

ETUDE DU K^*

Chapitre III - ETUDE DU K*

III-A Introduction

Les résultats de l'étude précédente sont encourageants puisque l'introduction des forces d'échange de π -π et de K-π a permis d'améliorer considérablement l'accord avec l'expérience. Dans cette partie nous allons tenter d'engendrer le K^* en utilisant les méthodes développées aux chapitres I et II. Il est important de montrer que cela est possible de façon à renforcer la confiance que l'on peut avoir dans le modèle dynamique que nous étudions. En effet, nous ne pouvons pas montrer rigoureusement que les approximations utilisées ont un sens. On pourra cependant les tester d'une certaine manière en étudiant plusieurs problèmes à l'aide des mêmes méthodes. D'un autre côté, devant le succès expérimental de SU_3, il devient nécessaire de traiter le ρ et le K^* sur le même pied puisqu'ils sont membres d'un même octet. Le mécanisme qui a permis d'engendrer le ρ doit donc, également, produire le K^*.

Les nombres quantiques du K^* sont $S = 1$, $I = 1/2$, $\ell = 1$ [1]. Comme précédemment, nous nous restreindrons aux amplitudes à deux corps. La voie de plus faible masse qui puisse avoir les nombres quantiques du K^* est la voie K-π . Nous étudierons donc un problème à une voie où le K^* sera engendré dans l'amplitude de diffusion $K\pi \to K\pi$ satisfaisant l'unitarité élastique.

Après $K\pi$, les premiers états sont $K\eta$ et $K^*\pi$ dont les seuils sont très proches si l'on prend la masse physique du K^* .

Tout d'abord il faut remarquer que $m_K + m_\pi$ est égal environ à 635 MeV. Puisque, d'autre part, $m_K + m_\eta$ et $m_{K^*} + m_\pi$ sont supérieurs à 1 GeV, la voie $K\pi$ est assez isolée. En d'autres termes l'unitarité élastique est valable sur une assez large partie de la coupure de droite.

Nous chercherons, comme nous l'avons fait pour le problème $\pi - \pi$, à améliorer l'unitarité en considérant une deuxième voie. Du point de vue de l'analyticité, les voies $K\eta$ et $K^*\pi$ semblent aussi importantes l'un que l'autre, puisqu'elles ont à peu près le même seuil. D'un autre côté, si nous voulions étudier la voie $K^*\pi$, il faudrait également considérer la voie $K2\pi$ puisque le K^* se désintégre en $K\pi$. Ceci dépasse nos possibilités de calcul. De plus, le K^* ayant un spin 1, on aurait des difficultés analogues à celles que nous avons soulignées à propos du problème à deux voies $\pi\pi - \pi\omega$ étudié par Zachariasen et Zemach.

Du point de vue de la théorie des groupes, il nous faut, comme nous l'avons déjà indiqué, engendrer le K^* par le même mécanisme que le ρ. Pour cette dernière résonance, nous avons considéré seulement, les amplitudes méson pseudo-scalaire-méson pseudo-scalaire ($\pi\pi$, $K\bar{K}$) et nous avons négligé les amplitudes méson pseudo-scalaire méson vectoriel ($\pi - \omega$). Pour le K^*, cela conduit par analogie à tenir compte des voies $K\pi$ et $K\eta$ et à négliger la voie $K^*\pi$. Enfin, c'est précisément dans le problème à deux voies $K\pi - K\eta$ que Capps [33] a engendré SU_3 en négligeant les différences de masse.

Pour toutes ces raisons nous allons étudier le problème à deux voies $K\pi - K\eta$; ce qui conduit à considérer les réactions

$$\pi\ (\underline{p}_1) + K(\underline{p}_2) \longrightarrow \pi\ (-\underline{p}_3) + K\ (-\underline{p}_4)$$

$$\pi\ (\underline{p}_1) + K(\underline{p}_2) \longrightarrow \eta\ (-\underline{p}_3) + K\ (-\underline{p}_4)$$

$$\eta\ (\underline{p}_1) + K(\underline{p}_2) \longrightarrow \pi\ (-\underline{p}_3) + K\ (-\underline{p}_4)$$

$$\eta\ (\underline{p}_1) + K(\underline{p}_2) \longrightarrow \eta\ (-\underline{p}_3) + K\ (-\underline{p}_4)$$

où $\underline{p}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) désigne les impulsions-énergies. Les invariants de Mandelstam s'écrivent

$$s = -(\underline{p}_1 + \underline{p}_2)^2\ ,\ t = -(\underline{p}_1 + \underline{p}_3)^2,\quad u = -(\underline{p}_1 + \underline{p}_4)^2\ ,$$

et la matrice T, pour un spin isotopique total $I = 1/2$, est définie dans la voie s par la relation :

$$(III\text{-}1)\quad \langle -\underline{p}_3, -\underline{p}_4 |\ S_{ij}\ | \underline{p}_1\ \underline{p}_2 \rangle = \delta_{ij} \langle -\underline{p}_3, -\underline{p}_4 \,|\, \underline{p}_1, \underline{p}_2 \rangle + \frac{2i\ T_{ij}}{\sqrt{\omega_1\ \omega_2\ \omega_3\ \omega_4}}\ \delta_4(\underline{p}_1 + \underline{p}_2 + \underline{p}_3 + \underline{p}_4).$$

Pour éviter les confusions avec les formules des chapitres précédents, nous attribuerons l'indice 3 à la voie $K\pi$ et l'indice 4 à la voie $K\eta$. L'onde partielle $t_{ij}(s)$ ($i, j = 3, 4$) correspondant à $\ell = 1$ est définie par

$$t_{ij}(s) = \frac{1}{q_i\ q_j}\ 2\pi \int_{-1}^{+1} d(\cos\theta)\cos\theta\quad T_{ij}(s, \cos\theta)\ ;$$

de sorte que l'unitarité s'écrit, en ne considérant que les voies $K\pi$ et $K\eta$

$$\text{(III-2)} \qquad \mathrm{Im}t_{ij}(s) = \sum_{k=3,4} \frac{q_k^{\,3}(s)}{\sqrt{s}}\, t_{ik}\, t^{*}_{kj}\; \theta(s - s_k),$$

où s_k et q_k sont respectivement le seuil et l'impulsion dans le centre de masse de la voie k.

$$s_3 = (m_K+1)^2 = 21,3 \; ; \quad s_4 = (m_K + m_\eta)^2 = 57,5 \; ;$$

$$\text{(III-3)} \qquad q_3^{\,2}(s) = \frac{1}{4s}\left[s-(m_K+1)^2\right]\left[s-(m_K-1)^2\right] ;$$

$$q_4^{\,2}(s) = \frac{1}{4s}\left[s-(m_K+m_\eta)^2\right]\left[s-(m_K-m_\eta)^2\right] .$$

De la même façon que pour le problème du ρ, nous étudierons les équations d'autoconsistance dans le cas où l'on suppose que les forces sont données uniquement par les termes d'échange d'une particule, et dans le cas où l'on inclut les forces dûes à l'échange du $\pi\pi$ et de $K\pi$.

Les conclusions auxquelles nous aboutirons seront analogues à celles des chapitres I et II : les termes à une particule échangée se révèleront insuffisants pour engendrer le K^* tandis que, avec l'addition des forces dûes à l'échange de deux particules, nous obtiendrons un accord assez satisfaisant avec l'expérience.

III-B - Approximation à une particule échangée.

III-B-1 - Equations d'autoconsistance

Dans la diffusion $K\pi \rightarrow K\pi$, les voies croisées sont $K\pi \rightarrow K\pi$ et $\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$. On peut donc avoir échange du ρ et du K^*. Pour les réactions $\eta K \rightarrow \pi K$ et $\eta K \rightarrow \eta K$, les nombres quantiques du η [1] ($\ell = 0$, $I = 0$, $G = +1$), interdisent l'existence d'états intermédiaires à une particule dans les voies croisées $\eta\pi \rightarrow K\bar{K}$ et $\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$. Par conséquent, la seule force qui interviendra sera dûe à l'échange du K^*. Les diagrammes d'échange d'une particule sont dessinés sur la figure (15).

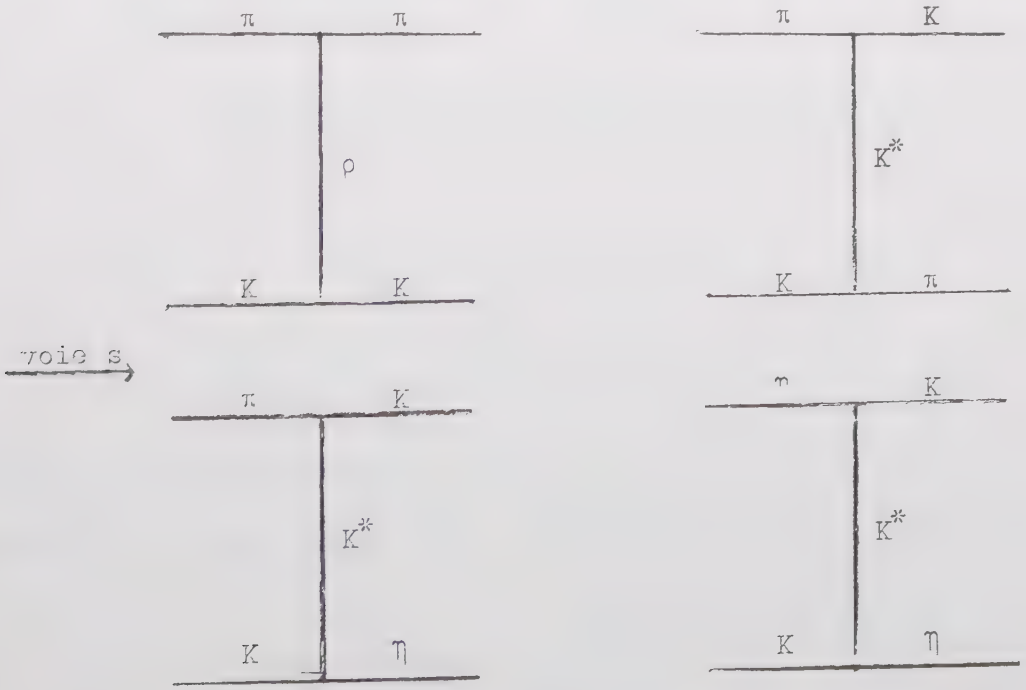


Figure (15) Les diagrammes d'échange du ρ et du K^*

Le calcul de ces diagrammes est immédiat à partir du Hamiltonien (II-11) si l'on définit en plus la constante de couplage K^* $K\eta$ par

$$\mathcal{H} = \gamma_\eta \left[i K^{*\dagger}_\mu (K \partial_\mu \eta - \eta \partial_\mu K) + \text{h.c.} \right]$$

On obtient, en projettant les résultats sur l'onde partielle ℓ, I de la voie s,

$$B_{33}^{\rho\, \ell I}(s) = - \frac{f_\pi f_K}{4\pi} \; C^{I\,1}_{1\,0} F_{33}^{\rho\, \ell\, 1}(s, m_\rho^2) .$$

$$B_{33}^{K^*\ell\, I}(s) = (-1)^{\ell+1} \; \frac{\gamma_{K^*}^2}{4\pi} \; 3C^{I\,1/2}_{1\,1} F_{33}^{K^*\,\ell\, 1}(s, m_{K^*}^2) ,$$

(III-4)

$$B_{34}^{\ell}(s) = (-1)^{\ell+1} \; \frac{\gamma_{K^*}\gamma_\eta}{4\pi} \; \sqrt{3} \; F_{34}^{\ell\, 1}(s, m_{K^*}^2) ,$$

$$B_{44}^{\ell}(s) = (-1)^{\ell+1} \; \frac{\gamma_\eta^2}{4\pi} \; F_{44}^{\ell\, 1}(s, m_{K^*}^2) .$$

Pour B_{33}^{ρ} et $B_{33}^{K^*}$ qui ont déjà été introduits précédemment (v. formule (II-58)) l'indice supérieur ρ ou K^* indique qu'elle est la particule échangée. Comme dans l'étude du ρ, $C^{I\,I'}$ représente les matrices de croisement du problème π -K

$$C^{I\,I'}_{1\,1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 4/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} ,$$

(III-5)

$$C^{I\,I'}_{1\,0} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1 \\ 1/\sqrt{6} & -1/2 \end{pmatrix} .$$

Le η ayant un spin isotopique nul, il n'y a que la valeur $I = 1/2$ qui soit permise dans les réactions $\pi + K \to \eta + K$ et $\eta + K \to \eta + K$. C'est pourquoi B_{34} et B_{44} n'ont pas d'indice de spin isotopique.

Les fonctions $F^{\ell\ell'}$ dont nous aurons besoin, peuvent s'écrire, comme au chapitre II, sous la forme

$$F^{\ell\,1}_{ij}(x,\ y) = \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} P_\ell(v)\ \frac{a_{ij} + v}{b_{ij} - v}\ dv ,$$

(III-6)

$$F^{\ell\,0}_{ij}(x, y) = \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} P_\ell\ (v)\ \frac{1}{b_{ij} - v}\ dv.$$

où

$$b^{\rho}_{33} = 1 + \frac{y}{2q_3^{\,2}(x)} ,$$

$$a^{\rho}_{33} = 1 + \frac{1}{2q_3^{\,2}(x)} \left[x - \frac{(m_K^{\,2}-1)^2}{x} \right] ,$$

(III-7) $$b_{33}^{K^*} = 1 + \frac{1}{2q_3^2(x)} \left[y - \frac{(m_K^2-1)^2}{x} \right] ,$$

$$b_{34} = \frac{1}{2q_3(x)q_4(x)} \left[q_3^2(x)+q_4^2(x)+ \frac{1}{4x} (2m_K^2-m_\eta^2-1) + y \right] ,$$

$$a_{34} = \frac{1}{2q_3(x)q_4(x)} \left[q_3^2(x)+q_4^2(x)- \frac{(m_\eta^2-1)^2}{4x} - \frac{(m_K^2-1)(m_K^2-m_\eta^2)}{y} \right] ,$$

$$a_{33}^{K^*} = 1 + \frac{1}{2q_3^2(x)} \left[x - \frac{(m_K^2-1)^2}{y} \right] ,$$

$$b_{44} = 1 + \frac{1}{2q_4^2(x)} \left[y - \frac{(m_K^2-m_\eta^2)^2}{x} \right] ,$$

$$a_{44} = 1 + \frac{1}{2q_4^2(x)} \left[x - \frac{(m_K^2-m_\eta^2)^2}{y} \right] .$$

Dans l'approximation à une particule échangée, on introduit les fonctions :

$$g_{33}^{(1)}(s) = \frac{1}{q_3^2(s)} \left[B_{33}^{\rho\ 1\ 1/2}(s) + B_{33}^{K^*\ 1\ 1/2}(s) \right]$$

(III-8) $$g_{34}^{(1)}(s) = g_{43}^{(1)}(s) = \frac{1}{q_3(s)q_4(s)} B_{34}^{1}(s)$$

$$g_{44}^{(1)}(s) = \frac{1}{q_4^2(s)} B_{44}^{1}(s)$$

et on suppose que le saut de t_{ij} sur les coupures de gauche est égal à celui de $g_{ij}^{(1)}(s)$.

Avant d'aller plus loin, il faut faire une remarque au sujet des forces à une particule que nous considérons en (III-8). Il existe une autre résonance K- π appelée κ de nombres quantiques I = 1/2; et $\ell^P = 0^+$(*). Nous ne considérons pas les forces produites par l'échange du κ. Ceci peut se justifier comme suit :

Nous introduisons l'intéraction κ K π par le Hamiltonien

$$\mathcal{H} = g \; \kappa^\dagger \; \vec{\tau} \quad K \; \vec{\pi} \; + h.c. \tag{III-9}$$

de sorte que g est déduit de la largeur Γ_κ par

$$\Gamma_\kappa = \frac{3}{2} \; \frac{q_3(m_\kappa^2)}{m_\kappa^2} \; \frac{g^2}{4\pi}$$

A partir de la largeur $\Gamma_\kappa \simeq 10$ MeV, on obtient $g^2/4\pi \simeq 0,3\, m_\pi^2$.

(*) Le spin et la parité du κ ne sont pas entièrement établis à l'heure actuelle ; mais, comme souligné par Wojciki et al (26) si $\ell^P = 0^+$, la désintégration $K^* \to \kappa + \pi$ ne pourrait pas se produire par intéraction forte. Ferro-Luzzi et al (27) ont observé que $\frac{K^* \to \kappa + \pi}{K^* \to \kappa + \pi} < 0,01$ ce qui favorise beaucoup l'hypothèse $\ell^P = 0^+$.

Calculons à partir de (III-9) le diagramme d'échange du κ dans $K\pi \to K\pi$. Si $B_{33}^{\kappa\ 1\ 1/2}$ est sa projection sur $\ell = 1$, $I = 1/2$, il est facile de voir que

$$\frac{B_{33}^{\kappa\ 1\ 1/2}}{B_{33}^{K^*\ 1\ 1/2}} = \frac{g^2}{\gamma_{K^*2}} \frac{1}{2q_3^{\ 2}(s)(a_{33}^{K^*} + b_{33}^{K^*})} \qquad \text{(III-10)}$$

Si l'on évalue (III-10) au seuil $s = s_3$ on obtient

$$\frac{B_{33}^{\kappa\ 1\ 1/2}}{B_{33}^{K^*\ 1\ 1/2}} \simeq \frac{1}{50} \quad \frac{g^2}{\gamma_{K^*2}} \quad \frac{1}{m_\pi^{\ 2}}$$

puisque $\gamma_{K^*}^2/4\pi \simeq 0,9$, (III-10) est très petit au seuil ; de plus, à haute énergie ce rapport tend vers zéro. L'échange du κ est donc bien négligeable devant celui du K^*.

A partir des forces données par (III-8), nous résoudrons approximativement les équations N/D comme au paragraphe II-B. Nous poserons donc :

$$t = ND^{-1}$$

où $(i, j = 3, 4)$

$$N_{ij} = g_{ij}^{(1)}$$

$$D_{ij} = \delta_{ij} - \frac{s-s_o}{\pi} \int_{s_i}^{\infty} ds' \frac{q_i^{\ 3}(s')}{\sqrt{s'}} \frac{g_{ij}^{(1)}(s')}{(s'-s)(s'-s_o)} \qquad \text{(III-11)}$$

Les expressions explicites de N et D sont alors aisément déduites de (III-6, 7, 8) :

$$N_{33} = \frac{1}{q_3^2(s)} \left[- \frac{f_\pi f_K}{4\pi} F_{11}^{\rho\, 1\, 1}(s, m_\rho^2) - \frac{\gamma_{K^*}^2}{4\pi} F_{11}^{K^*\, 1\, 1}(s, m_{K^*}^2) \right]$$

$$\text{(III-12)} \quad N_{34} = N_{43} = \frac{\sqrt{3}}{q_3 q_4} \frac{\gamma_{K^*}\gamma_\eta}{4\pi} F_{34}^{1\,1}(s, m_{K^*}^2)$$

$$N_{44} = \frac{1}{q_4^2} \frac{\gamma_\eta^2}{4\pi} F_{44}^{1\,1}(s, m_{K^*}^2)$$

$$\mathrm{Re}D_{33} = 1 + \frac{\gamma_{K^*}^2}{4\pi} G_{33}^{K^*} + \frac{f_\pi f_K}{4\pi} G_{33}^{\rho} ,$$

$$\mathrm{Re}D_{34} = -\sqrt{3} \frac{\gamma_{K^*}\gamma_\eta}{4\pi} G_{34} , \quad \mathrm{Re}D_{43} = -\sqrt{3} \frac{\gamma_{K^*}\gamma_\eta}{4\pi} G_{43} ,$$

$$\mathrm{Re}D_{44} = 1 - \frac{\gamma_\eta^2}{4\pi} G_{44} .$$

Les G_{ij} se calculent à partir des F_{ij} d'après l'égalité

$$\text{(III-14)} \quad G_{ij} = \frac{s-s_o}{\pi} P \int_{s_i}^{\infty} ds' \frac{q_i^2(s')}{q_j(s')\sqrt{s'}} \frac{F_{ij}\, ds'}{(s'-s)(s'-s_o)}$$

Nous choisirons le point de soustraction s_o en utilisant les mêmes arguments qualitatifs que pour le problème du ρ. Cette question est discutée en détail dans l'appendice de la référence (12) où nous montrons qu'il est raisonnable de placer s_o au début de la coupure de gauche dûe au K^* dans la diffusion $K\pi \to K\pi$.

Nous poserons donc

$$\text{(III-15)} \quad s_o = 2(m_K^2 + 1) - m_{K^*}^2 .$$

Dans cet appendice, nous étudions également la position des coupures de gauche. Il apparait que l'on doit se restreindre aux valeurs de $m_{K^*}^2$ qui sont telles que

$$m_{K^*}^2 > 29 . \qquad \text{(III-16)}$$

Autrement le pole dû au K* dans la voie s apparaitrait sur la coupure de gauche de t_{22} (la discussion est analogue à celle que nous avons faite pour le ρ).

La figure (16) représente les diagrammes où le K*apparait dans la voie s. La matrice des résidus correspondante s'écrit :

$$\text{(III-17)} \quad \mathcal{T} = \frac{1}{(s-m_{K^*}^2 + i\Gamma_{K^*} m_{K^*})} \begin{pmatrix} -2\gamma_{K^*}^2/4\pi & -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\gamma_{K^*}\gamma_\eta}{4\pi} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\gamma_{K^*}\gamma_\eta}{4\pi} & -\frac{2}{3} \frac{\gamma_\eta^2}{4\pi} \end{pmatrix}$$

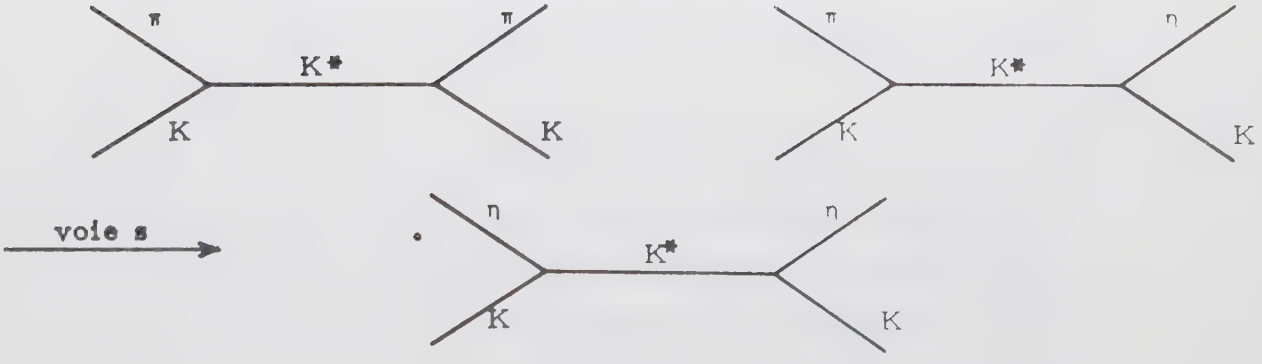


Figure (16) Le pôle du K* dans la voie s.

Un raisonnement analogue à celui que nous avons utilisé pour le ρ conduit aux équations d'autoconsistance ($R_{ij} = R\,e\,D_{ij}$) :

$$\text{(III-18)} \qquad Re\ \det D(m_{K^*}^2) = R_{33}R_{44} - R_{34}R_{43} = 0\ ,$$

$$2\,\frac{\gamma_{K^*}^2}{4\pi}\,(Re\det D)' + N_{33}R_{44} - N_{34}R_{43} = 0\ ,$$

$$\text{(III-19)} \qquad \frac{2}{3}\,\frac{\gamma_{\eta^*}^2}{4\pi}\,(Re\det D)' + N_{44}R_{33} - N_{43}R_{34} = 0\ ,$$

où $$(Re\det D)' = \frac{\partial}{\partial s}\,Re\det D\Big]_{s = m_{K^*}^2}\ .$$

Le paramètre d'asymétrie s'écrit ici

$$\text{(III-20)} \qquad Q = \frac{t_{34}}{\mathcal{G}_{34}} = \frac{-\sqrt{3}}{2\gamma_{K^*}\gamma_\eta/4\pi\,(Re\det D)'}\left[N_{34}R_{33} - N_{33}R_{34}\right]$$

Comme dans le problème du ρ, une matrice t symétrique conduit à $Q = \pm 1$, tandis que l'autoconsistance impose que $Q = 1$. Cette dernière condition ne permet pas de déterminer le signe relatif de γ_{K^*} et γ_η car ici N_{34} et R_{34} sont proportionnels à $\gamma_{K^*}\gamma_\eta/4\pi$ qui s'élimine donc dans la relation (III-20).

III-B-2 - Résultats numériques

a) Examinons d'abord les résultats du problème à une voie. Les équations correspondantes se déduisent de (III-18) et (III-19) en posant

$\gamma_\eta = 0$. La deuxième des équations (III-19) devient une identité et les deux autres relations s'écrivent

$$R_{33} = 1 + \frac{\gamma_{K^*}^2}{4\pi} G_{33}^{K^*} + \frac{f_\pi f_K}{4\pi} G_{33}^{\rho} = 0$$

(III-21)

$$q_3^2 \, 2 \frac{\gamma_{K^*}^2}{4\pi} \left(\frac{\partial}{\partial s} R_{33} \right) - \frac{\gamma_{K^*}^2}{4\pi} F_{33}^{K^*} 1\,1/2 (m_{K^*}^2, m_{K^*}^2)$$

$$- \frac{f_\pi f_K}{4\pi} F_{33}^{\rho} 1\,1/2 (m_{K^*}^2, m_\rho^2) = 0$$

Les fonctions G_{ij} étant positives, la première égalité de (III-21) permet de discuter immédiatement le signe de forces (une contribution négative dans R_{33} correspond à l'attraction).

Il apparait tout d'abord que le K* ne peut s'engendrer lui même puisque la force produite par l'échange du K* lui-même est répulsive. A la différence du ρ il n'y a donc pas de véritable bootstrap du K*. C'est l'échange du ρ qui va en fait permettre d'engendrer le K*. Pour obtenir une force totale attractive, il nous faut donc supposer que les forces dûes au ρ sont attractives (c'est-à-dire que $f_\pi f_K < 0$) et plus importantes que celles qui sont produites pour l'échange du K*.

Il est très satisfaisant de constater que ce signe négatif, nécessaire pour engendrer le K* dans l'approximation à une particule échangée, est également prédit par l'autogénération du ρ comme nous l'avons montré au chapitre II. Ceci montre, en effet, que les deux problèmes sont compatibles.

Les relations (III-21) constituent un système de deux équations qui font intervenir en principe quatre paramètres inconnus : m_K^2, $m_{K^*}^2$, m_ρ^2, $f_\pi f_K/4\pi$, $\gamma_{K^*}^2 4\pi$. Il sera donc impossible de déterminer la solution complètement. Nous l'étudierons en donnant à m_K^2 et à m_ρ^2 leurs valeurs physiques.
Le système (III-21) permet alors de calculer $\gamma_{K^*}^2/4\pi$ et $f_\pi f_K/4\pi$ en fonction de $m_{K^*}^2$. Le tableau (17) indique les résultats obtenus.

$m_{K^*}^2$	31	37	43	49
$f_\pi f_K/4\pi$	- 15	- 13	- 11	- 11
$\gamma_{K^*}^2/4\pi$	3,5	4	5	6

Tableau (17)

Les paramètres du K* ont, rappelons le, pour valeurs expérimentales :

(III-22) $$m_{K^*}^2 = 41 \quad , \quad \gamma_{K^*}^2/4\pi = 0,9 .$$

D'un autre côté, comme nous l'avons déjà indiqué précédemment, bien que f_K ne soit pas connu expérimentalement, il est raisonnable de supposer que $f_\pi = - f_K$ ce qui conduit à

(III-23) $$f_\pi f_K 4\pi = -2 .$$

Les valeurs calculées des constantes de couplage sont donc beaucoup trop grandes. La solution a donc les mêmes défauts que celle que nous avons obtenue au paragraphe (I-B) en essayant d'engendrer le ρ par les forces dues à l'échange du ρ dans l'approximation de l'unitarité élastique.

b) Examinons maintenant les résultats du problème à deux voies. Nous étudierons les solutions en donnant à m_ρ^2, à m_K^2 et à m_η^2 leurs valeurs physiques et en calculant $\gamma_{K^*}^2/4\pi$ et $f_\pi f_K/4\pi$ en fonction de $m_{K^*}^2$. Les résultats obtenus sont rapportés sur le tableau (18).

$m_{K^*}^2$	31	37	43	49
$f_\pi f_K/4\pi$	- 23	- 20	- 16	- 13
$\gamma_{K^*}^2/4\pi$	1,4	0,8	0,5	0,2
$\gamma_\eta^2/4\pi$	37	22	17	14
Q	3	1,5	1,3	1,2

tableau (18)

Solutions du problème à deux voies dans l'approximation à une particule échangée.

Tout d'abord, il est très satisfaisant de constater que Q est voisin de + 1 et non de -1. En effet, contrairement à ce qui a lieu pour le ρ , le signe de Q est déterminé par la solution des équations d'autoconsistance, puisque $\gamma_{K^*}\gamma_\eta/4\pi$ s'élimine, en fait, de la relation (III-20). Comme nous l'avons déjà indiqué, la solution exacte des équations conduit seulement à $Q = \pm 1$. Le fait que l'on trouve numériquement que $Q = 1$ montre que l'on a aussi autoconsistance pour les éléments non diagonaux t_{12} et t_{21}.

La constante $\gamma_\eta^2/4\pi$ qui s'introduit dans le problème à deux voies n'est pas connue expérimentalement ; cependant, à partir de SU_3 on montre que :

$$\gamma_\eta^2/4\pi = 3\,\gamma_{K^*}^2/4\pi \simeq 2,7 \quad . \tag{III-24}$$

Ce résultat peut être obtenu, soit à partir de la symétrie SU_3 exacte, soit à partir de la symétrie SU_3 cassée proposée par Muraskin et Glashow [28] combinée avec l'universalité de Sakurai (v. réf. (29)).

En comparant les tableaux (17) et (18), on voit que, dans l'approximation à une particule échangée, on n'améliore pas les résultats numériques en ajoutant une deuxième voie. En effet, $f_\pi f_K/4\pi$ augmente en valeur absolue et les résultats obtenus pour la constante $\gamma_\eta^2/4\pi$ sont beaucoup plus grands que la valeur indiquée en (III-24). $\gamma_{K^*}^2/4\pi$ est bien réduit à une valeur plus acceptable, mais cela est dû au fait que les valeurs trouvées de $\gamma_\eta^2/4\pi$ sont bien supérieures à ce que l'on pouvait attendre.

Le mauvais ordre de grandeur obtenu pour $\gamma_\eta^2/4\pi$ et $f_\pi f_K/4\pi$ montre que les forces à une particule ne sont pas physiquement suffisantes pour engendrer le K* . Il est interessant, malgré tout, d'étudier l'influence de ces forces sur l'onde partielle $\ell = 1$, $I = 3/2$ d'une

façon analogue à ce que nous avons fait au paragraphe (I-C). Dans cette onde partielle, la situation est renversée : l'échange du K* est attractif tandis que l'échange du ρ produit une force répulsive pour $f_\pi f_K < 0$. C'est pourquoi l'on peut vérifier, à partir du tableau (18), qu'il n'est pas prédit de résonnance pour I = 3, 2, ℓ = 1 puisque la force obtenue est répulsive. Ce résultat qualitatif est, jusqu'à présent, en accord avec l'expérience [30].

En conclusion, le modèle à une particule échangée apparait donc comme qualitativement satisfaisant bien qu'il soit impossible d'obtenir un accord quantitatif avec l'expérience.

III-C - Modèle tenant compte de forces à deux particules

III-C-1 - Equations d'autoconsistance

Nous allons ajouter aux forces à une particule échangée considérées au paragraphe (III-B), les forces à deux particules qui ont les plus grandes portées. La méthode utilisée sera la même que celle des chapitres I et II.

1°) Forces dûes à l'échange de $\pi - \pi$, dans $\pi K \to \pi K$

La voie t correspond à la réaction $\pi\pi \to K\bar{K}$ et le premier état intermédiaire est $\pi\pi$ (fig. (19.1)). Le diagramme correspondant fait intervenir la diffusion $\pi - \pi$ et, de nouveau la réaction $\pi\pi \to K\bar{K}$. Comme précédemment, nous considérerons les forces correspondantes au quatrième ordre en remplaçant les "boites noires" de la figure (19-1)

par les termes d'échange d'une particule. Ainsi, dans ce diagramme, la diffusion $\pi\pi$ sera approximée par les termes d'échange du ρ et la réaction $\pi\pi \to K\bar{K}$ par les termes d'échange du K^*. Cela conduit aux diagrammes de la figure (19-2)

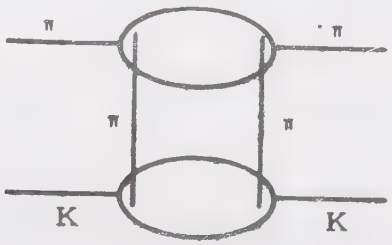


Figure (19-1) - L'échange de $\pi\pi$ dans $K\pi \to K\pi$

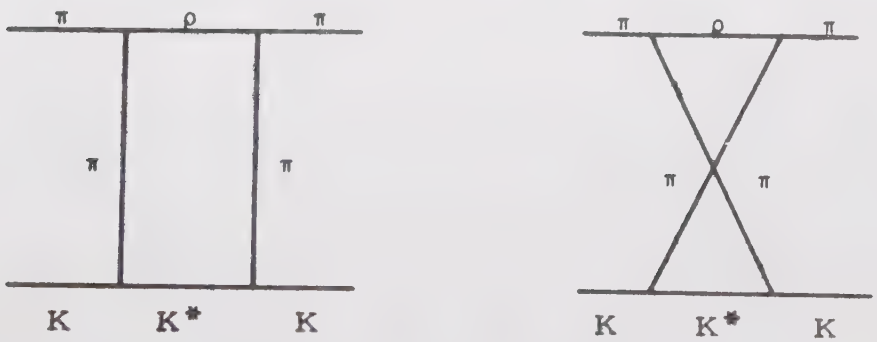


Figure (19-2) - L'échange de $\pi\pi$ à l'ordre 4.

La fonction $g^{(2)}_{33,t}(s)$ associée à ces forces s'écrit, tous calculs faits :

$$g^{(2)}_{33,t}(s) = \frac{f_\pi^2}{4\pi}\ \frac{\gamma_{K^*}^2}{4\pi}\ \frac{2}{\pi\, q_3^2(s)} \int_4^\infty dt' \left\{ \frac{2}{q_3^2(s)} \frac{q_1(t')}{\sqrt{t'}} \right.$$

(III-25) $$F^{\rho\,1\,0}_{33}(s,t')\, F^{0\,1}_{11}(t', m_\rho^2)\ F^{0\,1}_{12}(t', m_{K^*}^2)$$

$$\left. + \frac{3}{q_2(t')\sqrt{t'}}\ F^{\rho\,1\,1}_{33}(s,t')\, F^{1\,1}_{11}(t', m_\rho^2)\, F^{1\,1}_{12}(t', m_{K^*}^2) \right\}.$$

Dans cette formule, les états $\pi\pi$ et $K\bar{K}$ ont été numérotés par 1 et 2 comme au chapitre II. q_1 et q_2 sont donc donnés par les formules (II-2) et F_{11} et F_{12} par les formules (II-15) et (II-16).

Nous ne considérerons pas les autres forces à deux particules associées à la voie t. En fait le premier état négligé est $\pi\omega$ dont la masse au repos est bien supérieure à celle de l'état $\pi\pi$ ($m_\omega + m_\pi \simeq 920$ MeV). Nous discuterons à nouveau cette question plus loin.

2°).Forces dûes à l'échange de $K\pi$ dans $K\pi \to K\pi$

La voie u correspond de nouveau à la diffusion $K\pi$ et le premier état intermédiaire est $K\pi$ (voir (20-1)) Nous tiendrons compte de ces forces au quatrième ordre en y remplaçant les diffusions $K-\pi$ par les termes d'échange du ρ et du K^*. Cela conduit aux diagrammes (20-2).

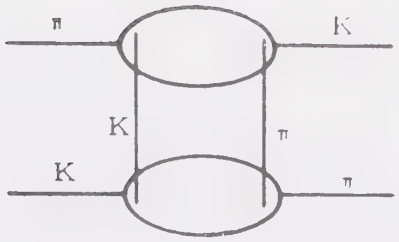


Figure (20-1) - L'échange de K - π dans la diffusion K π → K π

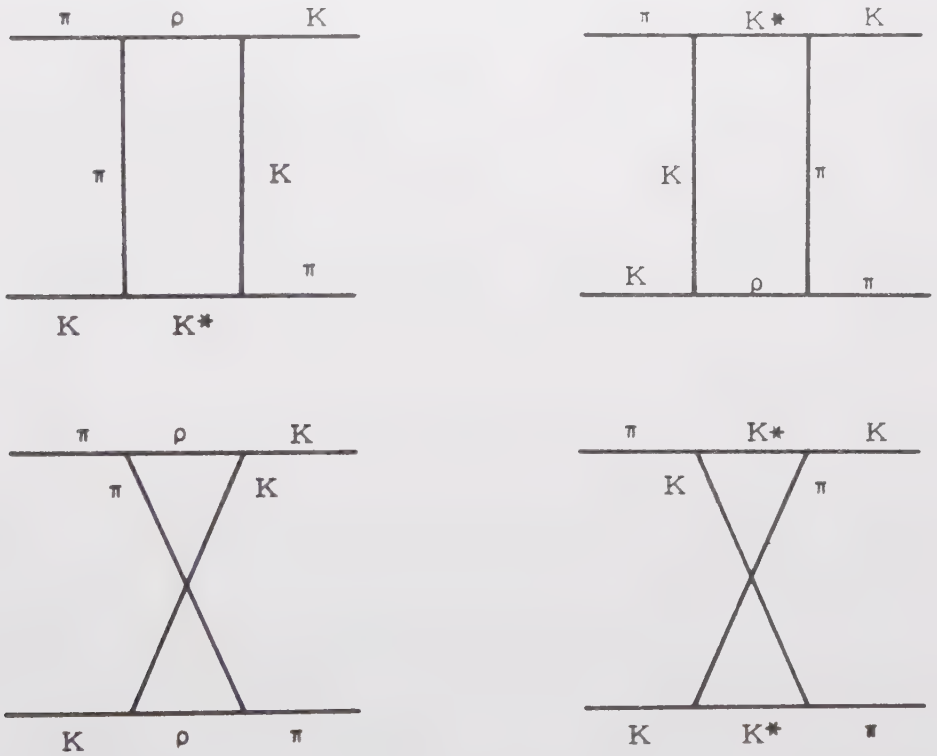


Figure (20-2) - L'échange de K - π au quatrième ordre.

La fonction $g^{(2)}_{33/4}$ correspondante s'écrit :

$$g^{(2)}_{33,u}(s) = \left(\frac{\gamma_{K^*}{}^2}{4\pi}\right)^2 \frac{5}{\pi q_3{}^2(s)} \left\{ -\frac{1}{q_3{}^2(s)} \int_{s_3}^{\infty} du' \frac{q_3(u')}{\sqrt{u'}} F^{K^*1\,0}_{33}(s,u') \right.$$

$$\left[F^{K^*0\,1}_{33}(u', m_{K^*}{}^2)\right]^2 + \frac{3}{2} \int_{s_3}^{\infty} \frac{du'}{q_3(u')\sqrt{u'}} F^{K^*1\,1}_{33}(s,u')$$

(III-26) $$\left.\left[F^{K^*1\,1}_{33}(u', m_{K^*}{}^2)\right]^2\right\} + \frac{\gamma_{K^*}{}^2}{4\pi} \frac{f_\pi f_K}{4\pi} \cdot \frac{2}{\pi q_3{}^2(s)}$$

$$\left\{ \frac{1}{q_3{}^2(s)} \int_{s_3}^{\infty} du' \frac{q_3(u')}{\sqrt{u'}} F^{K^*1\,0}_{33}(s,u') F^{\rho 0\,1}_{33}(u', m_\rho{}^2) \right.$$

$$F^{K^*0\,1}_{33}(u', m_{K^*}{}^2) + \frac{3}{2} \int_{s_3}^{\infty} \frac{du'}{q_3(u')\sqrt{u'}} F^{K^*1\,1}_{33}(s, u')$$

$$\left. F^{\rho\,1\,1}_{33}(u', m_\rho{}^2)\ F^{K^*1\,1}_{33}(u', m_{K^*}{}^2) \right\}$$

$g^{(2)}_{33,u}$ ne contient pas de terme en $(f_\pi f_K/4\pi)^2$ car le coefficient de spin isotopique s'annule. Dans la voie u, le premier état intermédiaire à deux particules que nous négligeons est $K\eta$. Il fournit des forces de portée plus faible que $K\pi$ puisque $m_K + m_\eta \simeq 1040$ MeV tandis que $m_K + m_\pi$ est égal environ à 630 MeV. En réalité nous montrerons plus loin que la force dûe à l'échange de $K\eta$ est négligeable.

3°) Forces à deux particules dans $\pi K \to \eta K$.

Dans la voie t, la réaction est $\eta\pi \to K\bar{K}$. Parmi les états intermédiaires à deux particules non étranges seuls $\pi + \eta$, $\pi + \rho$, $\omega + \rho$ sont permis.

On peut vérifier, d'autre part, qu'il n'existe pas de terme d'échange d'une particule dans les réactions $\eta\pi \to \eta\pi$ et $\eta\pi \to \pi + p$. La force correspondante est donc nulle au quatrième ordre des constantes de couplage ; et, dans cette approximation, les forces à deux particules avant la plus longue portée sont dûes à l'échange de $K\bar{K}$. Nous négligerons ces forces car elles ont une portée plus faibles que les forces d'échange de $\pi - \pi$ et de $K\pi$ que nous considérons. ($2m_K \simeq 960$ MeV).

Dans la voie u, la réaction est de nouveau $\pi K \to \eta K$ et le premier état intermédiaire est πK, (comme au 2°), l'état suivant est ηK). Le diagramme d'échange de $K\pi$ est dessiné sur la figure (21-1), il fait intervenir la diffusion πK et la réaction $\pi K \to \eta K$ que nous approximerons par les termes d'échange d'une particule (voir figure (21-2).

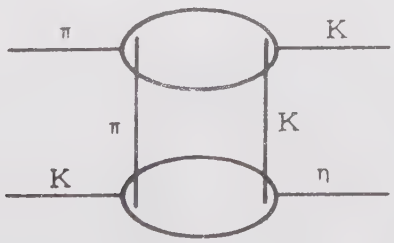


Figure (21-1) - L'échange de $K\pi$ dans $K\pi \to K\eta$

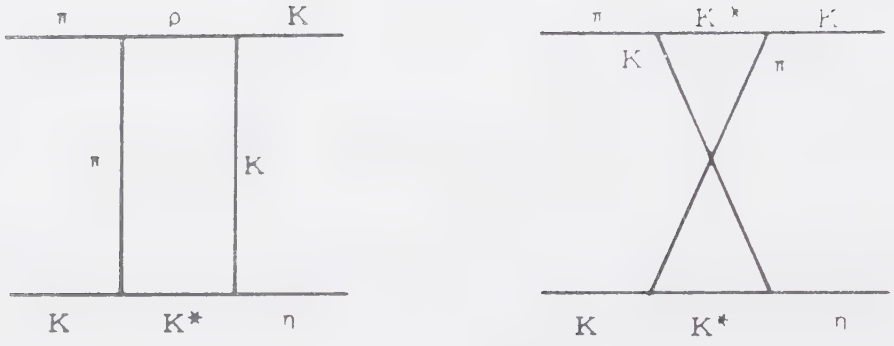


Figure (21-2) - L'échange de Kπ à l'ordre 4.

On est amené à introduire la fonction :

$$g_{34}^{(2)}(s) = -\frac{1}{q_3(s)q_4(s)}\ \frac{\gamma_{K^*}\gamma_\eta}{4\pi}\ \frac{f_\pi f_K}{4\pi}\ \sqrt{3}\int_{s_3}^{\infty} du'$$

$$\left\{ \frac{1}{q_3(s)q_4(s)}\ \frac{q_3(u')}{\sqrt{u'}}\ F_{34}^{1\,0}(s,\,u')\ F_{33}^{\rho\,0\,1}(u', m_\rho^2)\ F_{34}^{0\,1}(u',\, m_{K^*}^2) \right.$$

$$+\frac{3}{2}\ \frac{1}{q_4(u')\sqrt{u'}}\ F_{34}^{1\,1}(s,u')\ F_{33}^{\rho\,1\,1}(u', m_\rho^2)\ F_{34}^{1\,1}(u',\, m_{K^*}^2)$$

(III-27)

$$+\frac{1}{q_3(s)q_4(s)}\ \frac{\gamma_{K^*}\gamma_\eta}{4\pi}\ \frac{\gamma_{K^*}^2}{4\pi}\ \sqrt{3}\int_{s_3}^{\infty} du'$$

$$\left\{ \frac{1}{q_3(s)q_4(s)}\ \frac{q_3(u')}{\sqrt{u'}}\ F_{34}^{1\,0}(s,u')F_{33}^{K^*0\,1}(u,\, m_{K^*}^2)\ F_{34}^{0\,1}(u', m_{K^*}^2) \right.$$

$$\left. -\frac{3}{2}\ \frac{1}{q_4(u')\sqrt{u'}}\ F_{34}^{1\,1}(s,u')\ F_{33}^{K^*1\,1}(u', m_{K^*}^2)\ F_{34}^{1\,1}(u', m_{K^*}^2) \right\}$$

4°) Echange de deux particules dans $\eta K \to \eta K$.

Ici aussi, nous ne considérerons pas l'échange de particules dans la voie t puisque le premier état intermédiaire à deux particules qui fournisse unecontrinution non nulle à l'ordre quatre est également $K\bar{K}$. Dans la voie u, la réaction est, de nouveau, $\eta K \to \eta K$, le premier état intermédiaire étant πK (fig. 22-1) . Nous approximons ces forces par les diagrammes de la figure (22-2). Ce qui conduit à

$$g_{44}^{(2)}(s) = \frac{\gamma_{K^*}^2}{4\pi} \frac{\gamma_\eta^2}{4\pi} \frac{3}{\pi q_4^2(s)} \left\{ - \frac{1}{q_1^2(s)} \right.$$

$$\text{(III-28)} \int_{s_3}^{\infty} du' \frac{q_3(u')}{\sqrt{u'}} F_{44}^{1\,0}(s, u') \left[F_{34}^{0\,1}(u', m_{K^*}^2) \right]^2$$

$$\left. + \frac{3}{2} \int_{s_3}^{\infty} du' \frac{q_3(u')}{q_4^2(u')\sqrt{u'}} F_{44}^{1\,1}(s, u') \left[F_{34}^{1\,1}(u', m_{K^*}^2) \right]^2 \right\}$$

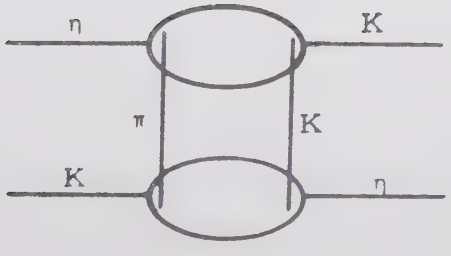


Figure (22-1)

L'échange de Kπ dans $K\eta \to K\eta$

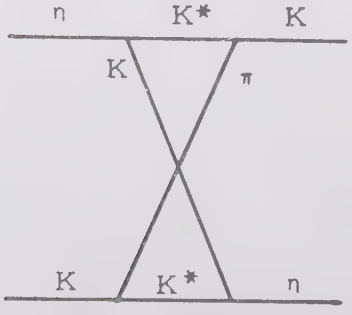


Figure (22-2)

L'échange de $K\pi$ **à l'ordre 4.**

5°) Etablissement des équations d'autoconsistance.

Nous introduisons maintenant la nouvelle approximation des forces dans les équations N/D. Nous allons supposer que $t_{ij}(s)$ a les mêmes coupures de gauche que les fonctions

$$(t_L)_{33}(s) = g_{33}^{(1)}(s) + g_{33,t}^{(2)}(s) + g_{33,u}^{(2)}(s) \ ,$$

(III-29) $$(t_L)_{34}(s) = (t_L)_{43}(s) = g_{34}^{(1)}(s) + g_{34}^{(2)}(s) \ ,$$

$$(t_L)_{44}(s) = g_{44}^{(1)}(s) + g_{44}^{(2)}(s) \ ,$$

et que son saut sur les coupures de gauche est égal à celui de $(t_L)_{ij}$.

Nous résoudrons les équations N/D en négligeant, comme au chapitre II, tous les termes d'ordre supérieur à quatre dans les constantes de couplage.

Cela conduit à poser, comme en (II-69) et (II-68),

(III-30) $$t = ND^{-1}$$

où (i, j = 3, 4)

(III-31)
$$N_{ij}(s) = (t_L)_{ij}(s) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=3/4} \int_{s_k}^{\infty} ds' \ \frac{q_k^{\,2}(s')}{q_j(s)\sqrt{s'}} \left[(s' - s_o)\, g_{ik}^{(1)}(s') - (s - s_o)\, g_{ik}^{(1)}(s) \right] \frac{g_{kj}^{(1)}(s')}{(s'-s)(s'-s_o)}$$

$$(III-32) \qquad D_{ij} = \delta_{ij} - \frac{s-s_o}{\pi} \int_{s_i}^{\infty} \frac{q_i^3(s')}{\sqrt{s'}} \frac{N_{ij}(s')ds'}{(s's-)(s'-s_o)}$$

Les équations d'autoconsistance sont toujours données par III-16 et (III-19) où, maintenant, N et D ont les expressions (III-31) et (III-32). Le paramètre d'asymétrie se calculera de même à partir de (III-20), (III-32) et (III-31).

Une difficulté apparait dans le calcul de N_{44} à cause de la différence de masse $\pi - \eta$. En effet la coupure de gauche de t_{44} s'étend à partir de $s = 2(m_K^2 + m_\eta^2) - s_3 \simeq 37$. Si donc nous cherchons à engendrer le K* avec $m_{K^*}^2 < 37$ l'expression approchée (III-31) de N_{44} serait complexe au pôle et notre approximation serait inconsistante Nous restreindrons donc aux valeurs de $m_{K^*}^2$ qui sont telles que

$$(III-33) \qquad m_{K^*}^2 > 37 .$$

Ceci permet, également, d'éviter les difficultés dûes à l'emplacement des coupures de gauche à une particule puisque l'inégalité (III-16) sera automatiquement satisfaite.

Dans le problème du ρ nous avons rencontré le même genre de difficulté pour calculer N_{22}. De plus la valeur physique de m_ρ^2 se trouvait sur la coupure de gauche ce qui faisait que la condition $m_\rho^2 \geq 51$ analogue à (III-33) ne pouvait pas être satisfaite. De toute façon, dans les deux cas, la partie imaginaire de N reste faible devant sa partie réelle sur toute la coupure de droite.

Nous placerons le point de soustraction s_o qui apparait en (III-31) et (III-32) au même endroit que dans l'approximation à une particule échangée en posant

(III-34) $$s_o = 2(m_K^2 + 1) - m_{K^*}^2$$

Cela se justifie par les mêmes arguments que dans le problème du ρ .

III-C-2 - Solution à une voie

Les équations d'autoconsistance peuvent être obtenues à partir des équations à deux voies en posant $\gamma_\eta = 0$. La condition $t_{44} = \mathcal{C}_{44}$ est alors identiquement vérifiée et l'on obtient

$$\mathrm{Re}\, D(m_{K^*}^2,\ m_{K^*}^2) = 0$$

(III-35) $$\frac{2\,\gamma_{K^*}^2}{4\pi} \left(\frac{\partial}{\partial s}\ \mathrm{Re}\, D\right)_{s=m_{K^*}^2} + N(m_{K^*}^2\ ,\ m_{K^*}^2) = 0$$

où

$$N(s, m_{K^*}^2) = (t_L)_{11}(s) + \frac{1}{\pi} \int_{s_3}^{\infty} ds'\ \frac{q_3^{\,3}(s')}{\sqrt{s'}} \left[(s'-s_o)\ g_{33}^{(1)}(s')\right.$$

$$\left. -(s-s_o)\ g_{33}^{(1)}(s)\right] \frac{g_{33}^{(1)}(s')}{(s'-s)(s'-s_o)} \quad ;$$

et $$\mathrm{Re}D = 1 - \frac{s-s_o}{\pi}\, P\int_{s_3}^{\infty} ds'\ \frac{q_1^{\,3}(s')}{\sqrt{s'}}\ \frac{N(s', m_{K^*}^2)}{(s'-s)(s'-s_o)} \quad .$$

Si on examine notre expression des forces à deux particules, ((III-25) et (III-26)), on s'aperçoit qu'elles font intervenir $f_\pi^2/4\pi$ comm paramètre en plus de ceux qui apparaissaient déjà dans les forces à

une particule (m_ρ^2, $m_{K^*}^2$, $f_\pi f_K/4\pi$, $\gamma_{K^*}^2/4\pi$). Pour obtenir de nouveau une famille de solutions dépendant d'un paramètre, il nous faut donc une hypothèse supplémentaire. Nous avons vu que la génération du ρ étudiée au chapitre II conduit à $f_\pi f_K < 0$; de plus nous avons obtenu une solution assez satisfaisante en supposant que $f_\pi^2/4\pi = f_K^2/4\pi$. Cela conduit à supposer ici que, comme prédit également par l'universalité de Sakurai,

(III-38) $$f_\pi^2/4\pi = -f_\pi f_K/4\pi ,$$

ce qui permet d'éliminer $f_\pi^2/4\pi$ des équations. Nous choisirons donc, comme dans l'approximation à une particule échangée, $m_{K^*}^2$, $f_\pi f_K/4\pi$ et $\gamma_{K^*}^2/4\pi$ comme paramètres inconnus. Cela suppose, évidemment, que les solutions trouvées seront telles que $f_\pi f_K < 0$, sinon (III-38) conduirait à $f_\pi^2 < 0$.

Pour une valeur donnée de $m_{K^*}^2$, (III-35) constitue un système de deux équations du second degré en $f_\pi f_K/4\pi$ dont les coefficients sont des polynômes en $\gamma_{K^*}^2/4\pi$ (*). Pour une valeur donnée de $m_{K^*}^2$, nous avons déterminé les relations entre $f_\pi f_K/4\pi$ et $\gamma_{K^*}^2/4\pi$ qui découlent de (III-35) en résolvant ces équations pour plusieurs valeurs de $\gamma_{K^*}^2/4\pi$. Il n'est pas apparu d'ambiguité car chacune d'elles n'avait qu'une seule racine négative et l'intersection des deux courbes ainsi obtenues fournissait la solution autocohérente du système (III-35).

(*) Les intégrales ont été calculées numériquement à l'aide d'une UNIVAC-1107.

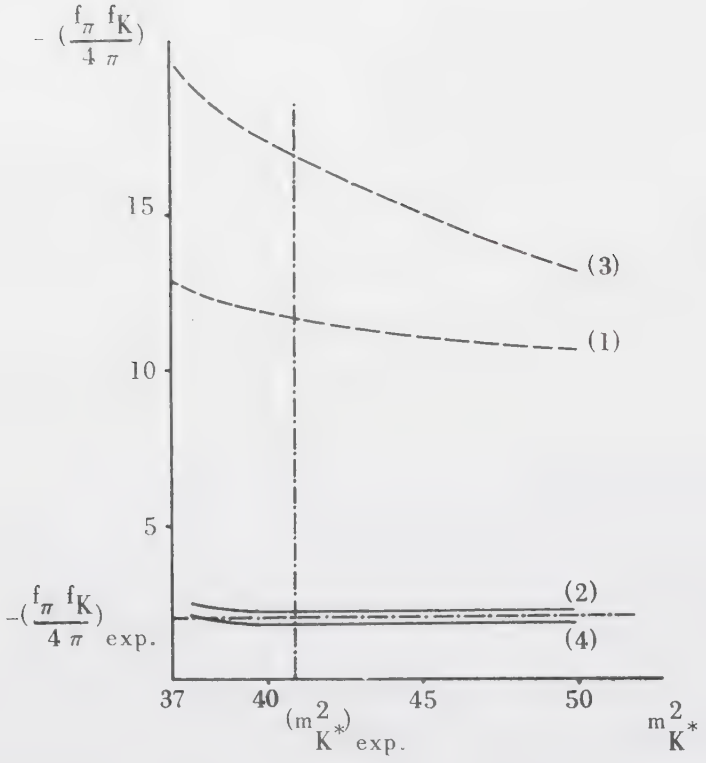


Figure (22)

Courbe (1) : résultats à une voie dans l'approximation à une particule échangée

Courbe (2) : résultats à une voie dans notre modèle

Courbe (3) : résultats à deux voies dans l'approximation à une particule échangée

Courbe (4) : résultats à deux voies dans notre modèle.

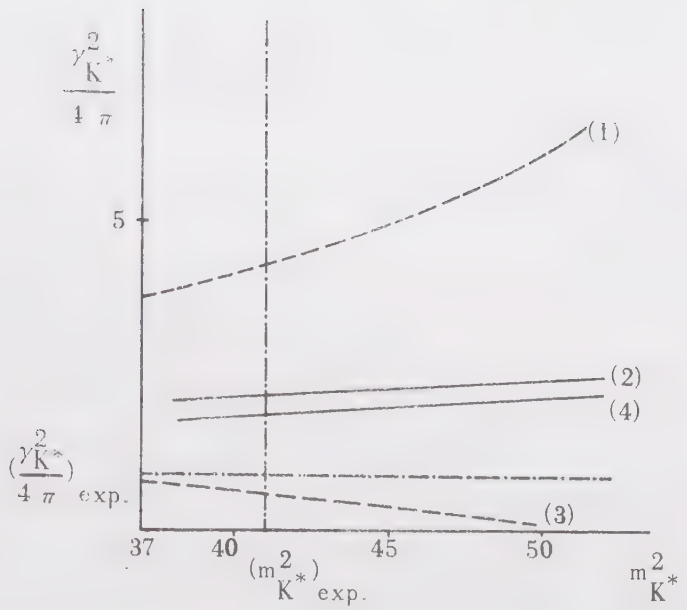


Figure (23)

Courbe (1) : résultats à une voie dans l'approximation à une particule échangée

Courbe (2) : résultats à une voie dans notre modèle

Courbe (3) : résultats à deux voies dans l'approximation à une particule échangée

Courbe (4) : résultats à deux voies dans notre modèle.

Sur la figure (22), la courbe (2) représente la relation entre $f_\pi f_K/4\pi$ et $m^2_{K^*}$ obtenue dans notre modèle, tandis que, pour permettre de comparer, nous avons aussi reproduit les résultats de l'approximation à une particule échangée (courbe (1)). De même, sur la figure (23) les courbes (1) et (2) représentent $\gamma^2_{K^*}/4\pi$ en fonction de $m^2_{K^*}$ dans les deux cas.

On voit sur ces courbes que si l'on donne à $m^2_{K^*}$ sa valeur physique, on obtient

(III-39) $$f_\pi f_K/4\pi \simeq -2,2 \quad , \quad \gamma^2_{K^*}/4\pi \simeq 2,2$$

Les valeurs physiques de ces constantes de couplage ont été indiquées en (III-22) et (III-23)

(III-40) $$f_\pi f_K/4\pi \simeq -2 \quad , \quad \gamma^2_{K^*}/4\pi \simeq 0,9 \ .$$

Si l'on compare (III-39) avec les résultats du modèle à une particule échangée, on voit que notre modèle conduit à un bien meilleur accord avec l'expérience. En particulier, la valeur calculée de $f_\pi f_K/4\pi$ est pratiquement égale à la valeur expérimentale indiquée en (III-40).

Il est interessant de comparer les signes des forces à une particule avec celui des forces à deux particules. Si l'on examine (III-25) on voit que $g^{(2)}_{33,t}(s)$ est donné par une intégrale positive puisque les fonctions $F^{\ell\ell'}$ sont supérieures à zéro. Ceci montre que les forces dûes à l'échange de $\pi - \pi$ sont attractives et ont, par conséquent, le même signe que les forces produites par l'échange du ρ .

Le signe des termes d'échange de $K\pi$ n'est pas évident puisque

$g^{(2)}_{33,u}$ contient des termes des deux signes comme on peut le voir sur la formule (III-26). Pour déterminer ce signe, nous avons également résolu le problème du K* en négligeant les forces dûes à l'échange de Kπ c'est-à-dire, en ne gardant dans N et D que les contributions à une particule et les termes provenant de $g^{(2)}_{11,t}$. Il apparait que la valeur absolue de $f_\pi f_K/4\pi$ augmente lorsque l'on inclut les termes d'échange de Kπ . Ceci montre que ces forces sont répulsives, puisque l'attraction produite par l'échange du ρ et de $\pi\pi$ doit être plus grande lorsqu'elles sont prises en considération (*). Elles ont donc le même signe que les forces d'échange du K* .

Enfin dans les deux modèles les forces produites par l'échange de particules dans la voie t sont, plus importantes que celles qui qui sont dûes à l'échange de particules dans la voie U pour $\ell = 1$, $I = 1/2$ ce qui permet d'engendrer le K* .

Le modèle à une particule échangée prédisait qu'il ne doit pas exister de résonance Kπ de nombres quantiques $\ell = 1$, $I = 3/2$ (voir paragraphe III-B). Nous avons, de même, étudié l'onde partielle $\ell = 1$, $I = 3/2$ en tenant compte des mêmes forces que pour $\ell = 1$, $I = 1/2$. Dans ce problème, $m^2_{K^*}$, $f_\pi f_K/4\pi$, $\gamma^2_{K^*}/4\pi$ apparaissent comme des paramètres fixés. Nous avons trouvé que, si l'on suppose que les constantes de couplage sont données par (III-30, il n'apparait pas, non plus, de résonance dans notre approximation. En effet, nous avons vérifié au moins pour les valeurs de s où l'approximation peut avoir un sens que ReD ne s'annule pas.

(*) D'une façon analogue, la valeur absolue de $f_\pi f_K/4\pi$ augmente dans le modèle à une particule échangée lorsque l'on ajoute les forces dûes à l'échange du K* (12).

L'amplitude $K\pi$, bien que moins symétrique que l'amplitude $\pi\pi$, possède néanmoins une symétrie de croisement entre les voies s et u qui décrivent toutes deux la diffusion $K\pi \to K\pi$. Dans l'approximation à une particule échangée cette symétrie n'est satisfaite qu'entre les termes de pôles dûs au K^* . Il est facile de vérifier, par les méthodes du paragraphe (I-D-2), qu'avec l'introduction des forces à deux particules que nous considérons, on satisfait en plus la symétrie de croisement entre les coupures dûes à l'état intermédiaire $K\pi$ à l'ordre 4 en γ_{K^*} à condition de ne tenir compte que des ondes S et P dans les voies s et u.

III-C-3 Solution à deux voies

Nous allons étudier les équations d'autoconsistance en faisant les mêmes hypothèses que dans l'approximation à une voie. Les paramètres à déterminer seront donc $m_{K^*}^2$, $\gamma_{K^*}^2/4\pi$, $f_\pi f_K/4\pi$ et $\gamma_\eta^2/4\pi$.

Les calculs numériques ont été effectués par les mêmes méthodes que précédemment. A partir de (III-31) et (III-32), on constate que les équations d'autoconsistance (III-18) et (III-19) sont du second degré en $f_\pi f_K/4\pi$. Il n'apparait pas d'ambiguité car chacune de ces équations ne possède qu'une seule racine négative et nous avons obtenu trois relations exprimant $f_\pi f_K/4\pi$ en fonction de $\gamma_{K^*}^2/4\pi$ et de $\gamma_\eta^2/4\pi$. Ce système d'équations a été résolu numériquement, pour une valeur donnée de $m_{K^*}^2$, en traçant les trois courbes correspondantes dans le plan $(f_\pi f_K/4\pi\ ,\ \gamma_{K^*}^2/4\pi\ )$ pour une valeur fixe de $\gamma_\eta^2/4\pi$. L'autoconsistance est réalisée pour la valeur de $\gamma_\eta^2/4\pi$ qui est telle que ces courbes passent par un même point ce qui détermine la solution.

Pour permettre la comparaison, nous avons indiqué les valeurs calculées de $\gamma_{K^*}^2/4\pi$ et de $f_\pi\ f_K/4\pi$ sur les mêmes figures que les solutions à une voie, c'est-à-dire sur les figures (22) et (23). Sur ces graphiques, les courbes (4) montrent les résultats obtenus dans notre modèle, tandis que nous avons aussi reproduit par les courbes (3) les résultats du calcul à deux voies dans l'approximation à une particule échangée qui étaient indiqués au tableau (18). Enfin, sur la figure (24), les courbes (1) et (2) décrivent les variations de $\gamma_\eta^2/4\pi$ en fonction de $m_{K^*}^2$ dans les deux modèles de forces considérés.

On peut voir sur ces figures que, en posant $m_{K^*}^2 = 41$, on obtient

$$f_\pi\ f_K/4\pi = -1,8\ ;\ \gamma_{K^*}^2/4\pi = 1,9\ ;\ \gamma_\eta^2/4\pi = 1,4\ . \qquad \text{(III-41)}$$

Pour cette solution, le paramètre d'asymétrie Q calculé à partir de (III-20), (III-30) et (III-31) a pour valeur

$$Q = 1,15\ .$$

Q^2 étant voisin de 1, l'approximation de la méthode N/D apparait comme assez valable. De plus, il est satisfaisant de constater que, comme dans l'approximation à une particule échangée, l'autoconsistance des éléments non diagonaux t_{12} et t_{21} est réalisée, puisque Q est voisin de +1 et non de -1 .

Si l'on compare les résultats (III-41) avec les valeurs physiques indiquées en (III-22), (III-23) et (III-27) soit

$$f_\pi\ f_K/4\pi = -2\ ;\ \gamma_{K^*}^2/4\pi = 0,9\ ,\ \gamma_\eta^2/4\pi = 2,7\ .$$

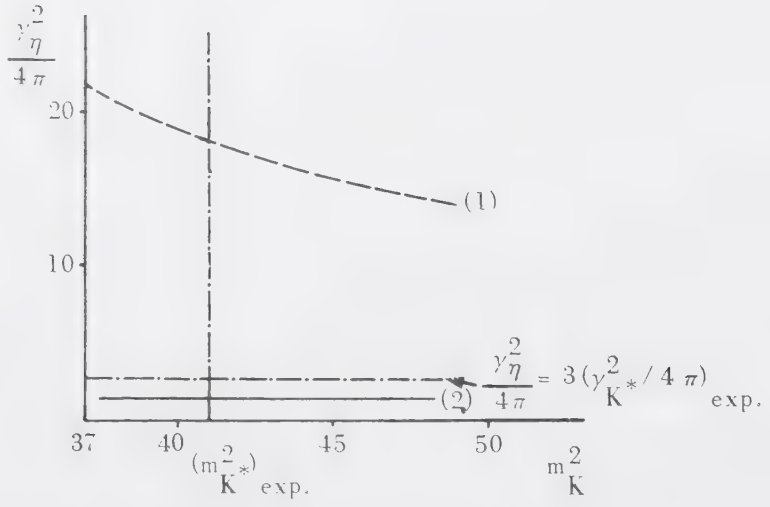


Figure (24)

Relations entre $\gamma_\eta{}^2/4\pi$ et $m_{K^*}{}^2$

a) dans l'approximation à une particule échangée (Courbe (1))

b) dans notre modèle (Courbe (2)).

On constate que l'introduction des forces à deux particules a considérablement réduit la valeur de $\gamma_\eta^2/4\pi$ (voir tableau (17)) qui a maintenant un ordre de grandeur satisfaisant. Ceci fait que $f_\pi f_{K'}/4\pi$ et $\gamma_{K^*}^2/4\pi$ ne sont pas beaucoup changés par l'addition de la voie K contrairement à ce que nous avons constaté dans l'approximation à une particule échangée.

Dans nos calculs, nous n'avons tenu compte que des forces de plus longues portées. Les états de plus faibles masses que nous avons négligés sont $K\bar{K}$, $K\eta$ et $\pi\omega$. Les seuils de ces états se situent aux alentours de 2 BeV. C'est pourquoi pour avoir une idée de la validité de notre approximation, nous avons étudié l'effet de l'une de ces forces espérant que les autres donneraient des effets du même ordre. Les forces dûes à $K\eta$ sont les plus faciles à considérer car on peut en tenir compte au quatrième ordre dans les constantes de couplage sans introduire de nouveau paramètre dans la théorie. Les équations d'autoconsistance ainsi obtenues ont été résolues de la même façon que précédemment. Il apparait que les résultats sont pratiquement inchangés lorsque l'on ajoute les forces produites par l'échange de $K\eta$ si bien que ces forces semblent négligeables. Ceci justifie à postériori le fait que nous n'avons tenu compte que de l'échange de $K\pi$ et de $\pi\pi$.

Le modèle où l'on inclut les forces d'échange de $K\eta$ a une propriété intéressante. Par les méthodes du paragraphe (I-D-2) on peut montrer que, dans ce modèle, les deux coupures des voies s et u associées aux états intermédiaires $K\pi$ et $K\eta$ satisfont la symétrie de croisement à l'ordre quatre des constantes de couplage à condition de ne tenir compte que des ondes S et P dans ces deux voies. On constate donc

que l'introduction des forces à deux particules que nous considérons perme de rétablir la symétrie de croisement dans un problème à deux voies comme dans un problème à une voie.

.
. .

CONCLUSION

Nous avons montré que la méthode proposée pour tenir compte approximativement des forces à deux particules conduit à des résultats assez satisfaisants lorsqu'on l'applique aux problèmes de la génération du ρ et du K^*.

En ajoutant les termes du quatrième ordre dans les constantes de couplage, on rétablit approximativement la symétrie de croisement entre les coupures correspondant aux états de plus basses masses dans les différentes voies.

Les forces à deux particules que l'on est amené à considérer ont les signes appropriés pour faciliter la génération du ρ et du K^*.

Dans notre approximation, comme dans celle de Zachariasen et Zemach, les équations d'autoconsistance conduisent, au moins dans l'approximation à deux voies, à des solutions bien définies. Dans ces solutions, il n'y a pas d'incohérence car tous les carrés de constantes de couplage calculés sont bien positifs. Cela n'était pas certain, a priori, étant donné la complexité des équations. Nous avons pu ainsi calculer quatre constantes de couplage. Les résultats obtenus en donnant aux masses leurs valeurs physiques sont rassemblés sur le tableau (25).

	$f_\pi^2/4\pi$	$\gamma_{K^*}^2/4\pi$	$f_y^2/4\pi$	$\gamma_\eta^2/4\pi$
(1)	10	3,2	21	
(2)	0,5	2,2	2,6	
(3)	20	0,8		37
(4)	1,8	1,9		1,4
(5)	2	0,9	1,2	2,7

Tableau (**25**)

Résultats pour les masses physiques :

(1) Génération du ρ dans l'approximation à une particule échangée en supposant que :

$$\frac{f_\pi^2}{4\pi} = \frac{f_K^2}{4\pi}$$

(2) Génération du ρ dans notre approximation en supposant que :

$$\frac{f_\pi^2}{4\pi} = \frac{f_K^2}{4\pi}$$

(3) Génération du K^* dans l'approximation à une particule échangée.

(4) Génération du K^* dans notre modèle en supposant que :

$$\frac{f_\pi^2}{4\pi} = -\frac{f_\pi f_K}{4\pi}$$

(5) Valeurs physiques des constantes de couplage.

L'introduction des forces à deux particules nous a permis d'améliorer considérablement l'accord avec l'expérience et notre modèle conduit en général à un ordre de grandeur correct pour les constantes de couplage contrairement au modèle à une particule échangée.

L'étude que nous avons faite de l'approximation de Zachariasen et Zemach a montré que les résultats étaient douteux puisque la solution obtenue par cette méthode dépend fortement de la position du point de soustraction. Au contraire, nous avons vérifié sur l'exemple du ρ que les solutions obtenues dans notre approximation ne dépendent pas beaucoup de ce paramètre.

Dans les deux problèmes que nous avons étudiés, les états de plus basses masses négligés sont $\pi\omega$, $\bar{K}K$, et $K\eta$ dont les seuils sont voisins de 2 BeV. Comme il s'avère que l'échange de $K\eta$ a une faible influence sur la génération du K^* , il semble justifié de ne tenir compte que des forces dûes à l'échange de $\pi\pi$ et de $K\pi$ comme nous l'avons fait ici.

Notre modèle, comme celui qui est basé sur les forces à une particule, conduit à un signe négatif pour le produit $f_\pi f_K$. En effet ce signe qui est prédit par la génération du ρ est nécessaire pour produire le K^*. Plus généralement, nous avons vérifié, au moins dans l'approximation à deux voies, que les aspects qualitatifs du modèle à une particule échangée subsistent lorsque l'on introduit les forces à deux particules.

° ° °

Pour terminer, il est utile de souligner quelques points importants concernant la validité de la méthode employée et des résultats obtenus.

1°) Les approximations que nous avons utilisées ne sont valables que pour les faibles valeurs de s ; en particulier nous n'avons tenu compte que du début des coupures. Malheureusement, en effectuant les calculs numériques, on s'aperçoit que les intégrales ne convergent pas très rapidement ce qui fait que les hautes énergies jouent, en réalité, un rôle assez important. Il faut cependant remarquer que nous avons vérifié numériquement que les forces dûes à l'échange de $K\eta$ ont peu d'influence sur la génération du K^*. Ceci fait penser que notre modèle n'est pas, malgré tout, très sensible aux forces à courtes portées.

D'un autre côté, au moins pour le problème du K^*, il semble assez justifié de ne tenir compte que du début des coupures de droite puisque, dans ce problème, l'introduction de la deuxième voie $K\eta$ ne change pas beaucoup les valeurs calculées de $f_\pi f_K/4\pi$ et de $\gamma^2_{K^*}/4\pi$.

2°) Notre méthode est basée sur un développement des fonctions N et D de la méthode N/D en séries entières des constantes de couplage. Nous ne pouvons pas étudier rigoureusement la convergence de ces développements ; mais, lorsque l'on examine les courbes que nous avons obtenues pour les constantes de couplage en fonction des masses, on a vraiment l'impression qu'il s'agit d'approximations successives qui convergent vers les valeurs physiques. Numériquement les termes du second et du quatrième ordre que nous avons calculés sont du même ordre de grandeur. Il faudrait, en principe, étudier les termes correctifs qui sont du sixième ordre. Ceux-ci font intervenir les forces à trois

particules et ils sont difficiles à évaluer. On peut espérer, malgré tout, qu'ils sont petits car les forces à trois particules ont une portée plus courte que celles des forces que nous avons considérées.

Il faut remarquer que les développements de N et D peuvent avoir un sens bien que celui de l'amplitude elle-même soit divergent. Un exemple d'une telle situation est fourni par la théorie des équations de Fredholm [35]. En effet, considérons une équation de la forme :

$$\Phi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 K(x, y)\ \Phi(y)\ dy$$

où Φ est la fonction inconnue et où f et K sont des fonctions données de carré sommable dans l'intervalle $[0, 1]$. Sa solution s'écrit :

$$\Phi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 H(x, y, \lambda)\ f(y)\ dy\ .$$

La fonction H qui est appelée le noyau résolvant de l'équation peut être calculée de deux façons différentes.

a) On peut résoudre l'équation par approximations successives ce qui conduit à développer H en puissances de λ. La série obtenue ne converge que pour $|\lambda|$ assez petit.

b) On peut, au contraire, utiliser les déterminants de Fredholm ce qui conduit à une expression du type

$$H(x, y, \lambda) = \frac{\mathcal{D}(x, y, \lambda)}{\mathcal{D}(\lambda)}$$

où $\mathfrak{D}(x, y, \lambda)$ et $\mathfrak{D}(\lambda)$ sont maintenant développables en puissances de λ quelque soit λ.

Bien que les équations intégrales que nous avons utilisées ne soient pas du type de Fredholm, la méthode b) possède une grande analogie avec la méthode N/D. En particulier, en théorie du potentiel, les deux méthodes sont équivalentes [36]. On peut donc espérer que, dans notre cas également, on peut développer N et D en puissances des constantes de couplage, alors même que le développement de l'amplitude elle-même est divergent.

3°) L'examen du tableau (25) montre que notre modèle ne conduit pas à un véritable accord avec l'expérience bien que les ordres de grandeur soient corrects. On aurait pu penser, en outre, combiner les deux problèmes pour calculer les masses du ρ et du K^*. Cela n'est pas possible car les valeurs calculées de $f_\pi^2/4\pi$ et de $\gamma_{K^*}^2/4\pi$ aux chapitres II et III ne sont pas compatibles.

Dans les calculs de bootstrap on utilise des conditions d'auto-consistance que l'on exprime dans des modèles dynamiques simples. Ces conditions doivent être satisfaites de toute façon puisqu'elles expriment simplement la symétrie de croisement. Nous avons montré que, en améliorant le modèle dynamique utilisé, on déduit de meilleurs résultats des équations d'autoconsistance. Ceci tend à montrer que la méthode du bootstrap est valable. Malgré tout, elle ne semble pas permettre de calculer de façon commode les constantes de couplage puisque, même dans notre modèle qui est déjà assez complexe nous n'avons obtenu qu'un accord grossier avec l'expérience.

4°) Nous avons vérifié, au moins dans l'approximation à deux voies, que les aspects qualitatifs du modèle à une particule échangée subsistent lorsque l'on introduit les forces à deux particules. Les résultats qualitatifs que nous avons obtenus semblent donc être indépendants du modèle de force et avoir, par conséquent, un lien avec l'autoconsistance de la matrice S exacte. On comprend alors pourquoi le modèle à une particule échangée est qualitativement en accord avec l'expérience bien qu'il conduise en général à des constantes de couplage beaucoup trop grandes.

Nous n'avons étudié cette question, ici, que pour les cas particuliers du ρ et du K^*. Il serait intéressant de considérer d'autres problèmes. En particulier, comme nous l'avons déjà souligné, l'approximation à une particule échangée permet d'engendrer SU_3 lorsque l'on néglige les différences de masses. Il sera très intéressant de voir si ce résultat est également vrai avec notre nouvelle approximation des forces, ou si, au contraire, il est lié aux forces à une particule de façon à se rendre compte du lien exact qui existe entre les propriétés d'analyticité des amplitudes et la théorie des groupes.

Un autre problème à signaler est celui de la diffusion KK. Comme nous l'avons déjà souligné, quelques évidences d'une résonance $K^+ K^+$ ont été rapportées. Si l'existence d'une résonance KK de spin isotopique 1 devait se confirmer par la suite, on aboutirait à une contradiction avec le modèle à une particule échangée qui donne une force répulsive dans cette voie [8]. Il sera intéressant de voir si notre modèle conduit, dans ce problème, à un signe de forces différent de celui des forces à une particule.

5°) Du point de vue expérimental, le signe relatif de f_π et de f_K n'est pas connu avec certitude ; malgré tout le résultat que nous avons obtenu semble satisfaisant car il est en accord avec les prédictions de SU_3 et de l'universalité de Sakurai [13]. En effet, bien qu'elle soit cassée dans la Nature, la symétrie unitaire a remporté un grand succès expérimental ; d'autre part, les hypothèses de la référence (13) sont, jusqu'à présent, en accord avec l'expérience. Cette dernière question a été discutée, il y a quelques temps, par Sakurai lui-même qui a examiné, en particulier, les résultats expérimentaux sur les diffusions π - N et K - N [39]. Les travaux postérieurs ne sont pas en désaccord avec les conclusions de la référence (39). Ainsi, les calculs récents sur la diffusion π - N [31] confirment une des prédictions de l'universalité, à savoir que

$$f_\pi \simeq g^{(1)}_{\rho NN}$$

où $g^{(1)}_{\rho NN}$ est la constante de couplage vectoriel ρ - NN.

D'un autre côté, l'étude de la diffusion K - N permet, en principe, de mesurer le signe de $f_\pi f_K$. En effet, Warnock et Frye [32], à partir de résultats expérimentaux sur les interactions $K^+ p$ et $K^+ d$, obtiennent des solutions telles que

$$f_K \; g^{(1)}_{\rho NN} < 0$$

à condition de choisir les déphasages du type de Yang pour la diffusion K - N dans l'état de spin isotopique zéro. Les résultats des références

(31) et (32) donnent bien alors que

$$f_\pi f_K < 0$$

ce qui est en accord avec nos résultats bien qu'on ne puisse tirer encore aucune conclusion définitive. (Il faudrait, pour cela, en particulier, améliorer les résultats expérimentaux sur la diffusion K^+ - d).

6°) Notre modèle conduit à ajouter systématiquement l'échange d'un état de moment angulaire égal à zéro dans les voies croisées. Ceci semble assez satisfaisant au point de vue expérimental en ce qui concerne l'interaction méson π - méson π . En effet, dans les études qui ont été faites jusqu'à présent des diffusions π - N, K - N, N - N à l'aide des forces à une particule, l'accord avec l'expérience n'est obtenu que si l'on considère l'échange d'une "particule" σ qui aurait un spin égal à zéro [38]. Les tentatives qui ont été faites pour mettre le σ en évidence ont donné jusqu'à présent des résultats négatifs, ce qui fait penser que le σ est en fait une approximation de l'état de deux π non résonants dans un moment angulaire relatif nul. Le fait que la force dûe au σ soit nécessaire pour rendre compte des résultats expérimentaux tendrait à montrer que notre modèle de force est réellement plus proche de la réalité que le modèle à une particule échangée.

7°) Une méthode proche de la nôtre a été utilisée par Baker et Zachariasen [37] pour étudier l'amplitude de diffusion méson π - méson π dans une théorie du type $\lambda(\pi_i \pi_i)^2$. Ces auteurs ont exprimé l'amplitude de diffusion π - π comme un quotient de deux séries de puissances de λ en posant :

$$t\ (s) = N\ (s)\ /\ D\ (s),$$

où $$D\ (s) = 1 - \left(\frac{s - s_o}{\pi}\right) \int_4^\infty \frac{q^3\ (s')}{\sqrt{s'}} \quad \frac{N\ (s')}{(s' - s)\ (s' - s_o)}\ ,$$

et $$N\ (s) = \sum_1^\infty \lambda^n \quad N_n\ (s)\ .$$

Baker et Zachariasen calculent les coefficients $N_n\ (s)$ en identifiant le développement de la matrice $t\ (s)$ avec le développement de perturbation :

$$t\ (s) = \sum_1^\infty t_n\ (s)\ \lambda^n$$

On obtient ainsi, pour les deux premiers termes

$$N_1\ (s) = t_1\ (s)$$

$$N_2\ (s) = t_2\ (s) - t_1\ (s) \quad \frac{s - s_o}{\pi} \int_4^\infty \frac{q^3\ (s')}{\sqrt{s'}} \quad \frac{t_1\ (s')}{(s' - s)\ (s' - s_o)}$$

L'inconvénient de cette méthode est que la fonction $N\ (s)$ ainsi calculée possède une coupure de droite comme on peut le voir sur l'expression de $N_2\ (s)$ et l'approximation de $t\ (s)$ que l'on obtient n'est pas unitaire sur la coupure de droite. La raison en est que Baker et Zachariasen ne gardent en réalité que la première itération des équations N/D à tous les ordres en λ.

Au contraire, notre méthode appliquée à ce problème conduit à garder une partie de la deuxième itération pour calculer N_2. On obtient alors :

$$N_2(s) = t_2(s) + \frac{s-s_o}{\pi} \int_4^\infty \frac{q^3(s')}{\sqrt{s'}} \left[(s'-s_o)\, t_1(s') - (s-s_o) t_1(s)\right] \frac{t_1(s')}{(s'-s)(s'-s_o)}$$

Il est facile de vérifier que cette expression n'a pas de coupure de droite et que, par conséquent, notre approximation de la matrice t(s) est bien unitaire contrairement à la forme utilisée par Baker et et Zachariasen.

REFERENCES

(1) Une table à peu près complète actuellement des particules, est publiée par
A.H. Rosenfed, A. Barbaro-Galtieri, W.H. Barkas, P.L. Bastien, J. Kirz et M. Ros.
Review of Modern Physics 36 977 (1964)

(2) W.R. Frazer et J.R. Fulco Physical Review Letters 2 365 (1959)

(3) G.F. Chew et S. Mandelstam Physical Review 119 467 (1960) et Nuovo Cimento 19 752 (1961), voir aussi la référence (4)

(4) G.F. Chew "The S. Matrix Theory of Strong Interactions" édité par Benjamin (New-York).

(5) Voir, par exemple, les articles cités en (6) ainsi que

L.A.P. Balàzs	Phys. Rev.	128	1 939	(1962)
	Phys. Rev. Lett.	10	170	(1963)
	Phys. Rev.	129	872	(1963)
	Phys. Rev.	134 B	1 315	(1964)
D.Y. Wong	Phys. Rev.	126	1 220	(1962)
V. Singh et B.M. Udgaonkar	Phys. Rev.	130	1 177	(1963)
B.H. Brandsen, I.R. Gatland et J.W. Moffet	Phys. Rev.	128	859	(1962)
R.E. Kreps, L.F. Cook, J.J. Brehm et R. Blankenbecler	Phys. Rev.	133 B	1 526	(1964)

(6) Voir, entre autres, les articles cités en (7), (8), (10) et (12) ainsi que :

G.F. Chew — Phys. Rev. Lett. 9 233 (1962)

F.E. Low — Phys. Rev. Lett. 9 277 (1962)

R.H. Capps — Phys. Rev. 131 1 307 (1963)

E. Abers et C. Zemach — Phys. Rev. 131 2 305 (1963)

J. Ball et D.Y. Wong — Phys. Rev. 133 B 179 (1964)

(7) F. Zachariasen et C. Zemach — Phys. Rev. 128 849 (1962)

(8) B. Diu, J.L. Gervais, et H.R. Rubinstein — Nuo. Cim. 31 342 (1964)

(9) Nous citerons par exemple :

R.H. Capps — Phys. Rev. Lett. 10 312 (1963)

Nuo. Cim. 27 1 268 (1963)

Nuo. Cim. 30 341 (1963)

Phys. Rev. 134 B 461 (1964)

H.M. Chan, P.C. De Celles, J.E. Paton — Phys. Rev. Lett. 11 251 (1963)

et — Nuo. Cim. 33 71 (1964)

R.E. Cutkosky — Phys. Rev. 131 1 888 (1963)

R.E. Cutkosky — Annals of Physics 23 415 (1963)

R.E. Cutkosky, Kalckar et P. Tarjanne — Phys. Lett. 1 93 (1962)

R.E. Cutkosky et M. Léon — prétirage

R.E. Cutkosky et K.Y. Lin — prétirage

R.E. Cutkosky, M. Léon et K.Y. Lin — prétirage

A.W. Martin et K.C. Wali — Phys. Rev. 130 2 455 (1963)

A.W. Martin et K.C. Wali — Nuo. Cim. 31 1 324 (1964)

B. Diu, H.R. Rubinstein et J.L. Basdevant prétirage

R.E. Cutkosky et P. Tarjanne

Phys. Rev. 133 B 1 292 (1964)

(10) R.H. Capps Phys. Rev. Lett. 14 31 (1965)

(11) G.F. Chew et S. Frautschi { Phys. Rev. Lett. 7 394 (1961); Phys. Rev. Lett. 8 41 (1962)

voir aussi M. Jacob et G.F. Chew :

"Strong Interaction Physics" édité par Benjamin (New-York)

(12) B. Diu, J.L. Gervais et H.R. Rubinstein

Nuo. Cim. 31 27 (1964)

(13) J.J. Sakurai An. of Phys. 11 1 (1960)

(14) R. Omnès Nuo. Cim. 8 316 (1958)

(15) E. Abers et F. Zachariasen prétirage

(16) R.M. Rockmore Phys. Rev. 132 878 (1963)

(17) L.S. Liu Phys. Rev. 125 761 (1962)

(18) Voir, par exemple, le livre de E.T. Whittaker et G.N. Watson "A Course of Modern Analysis" Cambridge University Press page 322.

(19) R.H. Capps Phys. Rev. 131 1 307 (1963)

(20) J.D. Bjorken Phys. Rev. Lett. 4 473 (1960)

(21) Voir par exemple S.L. Glashow

Phys. Rev. Lett. 11 48 (1963)

(22) Voir, entre autres, le rapport de Salam à la conférence de Dubna (1964)

(23) J.D. Bjorken et M. Nauenberg

Phys. Rev. 121 1 250 (1961)

(24) M. Ferro-Luzzi, R. George, Y. Goldsmidt-Clermont, V.P. Henri, B. Jongejans, D.W.G. Leith, G.R. Lynch,

F. Muller et J.M. Perreau : Dubna International Conférence 1964.

(25) R.E. Kreps, L.F. Cook, J.J. Brehm et R. Blankenbecler Phys. Rev. 133 B 1 526 (1964)

(26) S.G. Wojciki, G.R. Kalbfleisch et M.H. Alson Phys. Lett. 5 283 (1962)

(27) M. Ferro-Luzzi, R. George, Y. Goldsmidt-Clermont, V.P. Henri, B. Jongejans, D.W.G. Leith, G.R. Lynch, F. Muller et J.M. Perreau : Dubna International Conférence (1964).

(28) M. Muraskin et S.L. Glashow, Phys. Rev. 132 482 (1963)

(29) B. Diu, H.R. Rubinstein et J.L. Basdevant prétirage

(30) Ceci a été observé en particulier par S.G. Wojciki et al (voir référence (26))

(31) L.L.J. Wick Nuo. Cim. 31 643 (1964) voir aussi les articles cités dans cette référence.

(32) R.L. Warnock et G. Frye prétirage

(33) R.H. Capps Phys. Rev. Lett. 10 312 (1963)

(34) J.R. Fulco, Shaw et D.Y. Wong prétirage

(35) Voir par exemple le livre de F.G. Tricomi : "Integral Equations" Interscience Publishers London.

(36) R.G. Newton Journal of Mathematical Physics 1 319 (1960)

(37) M. Baker et F. Zachariasen Phys. Rev. 118 1 659 (1960)

(38) Cela a été, en particulier, souligné par D.V. Skirkov : "Theory of π - nucleon interaction below 1 Gev" rapport à la conférence de Dubna 1964. Voir aussi la référence (32).

(39) J.J. Sakurai "1962 International Conference on High Energy Physics" C.E.R.N. page 176.

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Les Super-Multiplets de Wigner

Vu et approuvé
Paris, le 15 Avril 1965
Le Doyen de la Faculté des Sciences
M. ZAMANSKY

Vu et permis d'imprimer
Le Recteur de l'Académie de Paris
J. ROCHE